
3 3433 07188966 5



Marzo 1907

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA
SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

PUBBLICATO PER CURA DEI DIRETTORI
A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA
E DEI DELEGATI DELLA SOCIETÀ
G. P. GRIMALDI ED A. SELLA

5 . 13

SERIE V. - Tomo XIII.

DIREZIONE
Istituto fisico della R. Università
PISA.

AMMINISTRAZIONE
Via Gino Capponi, 8
FIRENZE.

PISA DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1907

(*Pubblicazione Mensile*)

INDICE

left in place

628449A

LUDWIG BOLTZMANN

LA SUA OPERA E IL SUO PENSIERO

(20 febbraio 1844 - 7 settembre 1906).

§ 1. Quando, sono appena tre anni, si celebrò con tanta solennità il sessantesimo anniversario del professor Ludwig Boltzmann, ricordo di essermi meravigliato in apprendere che egli fosse relativamente così giovine. In realtà il Boltzmann apparteneva per l'opera e per il pensiero a quella grande generazione, che vide nascere la termodinamica e la nuova elettrologia, alla generazione di Helmholtz e di Clausius, di Lord Kelvin e di Maxwell.

La filosofia naturale dell'epoca moderna ha oscillato sempre, a cominciare dalle contese classiche dei continuatori di Newton coi discepoli di Cartesio, e venendo fino alle polemiche sempre vive dei meccanici e degli energetici contemporanei, fra due forme antagonistiche di pensiero e di ricerca. Si tengono stretti gli uni al buon metodo vecchio del nostro Galileo, al metodo che affronta un problema alla volta, e lo risolve, in tutte le sue caratteristiche quantitative; e gli altri confidano invece in una forma particolare di intuito, la quale dovrebbe porgere il mezzo per la scoperta e per l'enunciazione dei grandi principî generalissimi.

Questo non vuol dire naturalmente che i singoli si rendano sempre bene conto della loro personale posizione filosofica. Newton, che pure aveva costruito un modello ingegnoso per l'interferenza della luce, enunciò una volta di sfuggita quell'*hypotheses non fingo,* che fu il mal seme della moderna

fenomenologia; e l'Ostwald ultimamente preconizzava sul serio « die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus », senza accorgersi che, nella ipotesi migliore, il resultato della sua battaglia sarebbe pur sempre quello di sostituire una dottrina semifilosofica ad un'altra, immeritevole anch'essa del vocabolo della scienza.

Ma Ludwig Boltzmann fu uno spirito troppo sottile, e troppo severamente educato e consapevole della importanza fondamentale del metodo nella ricerca scientifica [1]), per non scrutare egli stesso le sue convinzioni e le sue tendenze. E in un memorabile discorso, alla riunione di Monaco della Società dei Medici e Naturalisti Tedeschi (1899), diceva senza ambagi « Io mi presento a voi come un reazionario, che malgrado i « novatori serba intatta la sua fede alle vecchie idee classi- « che ». E veramente egli era persuaso che le imagini della fisica tradizionale, come mezzo euristico e come sussidio didattico, meritassero sempre di venire coltivate con amore.

Egli avrebbe sorriso senza dubbio, se gli si fosse fatto l'appunto di costruire dei modelli piuttosto che delle vere e proprie teorie, avendo compreso con Maxwell che alle ricerche teoriche non può segnarsi altro scopo da quello in fuori della descrizione delle imagini o delle analogie meccaniche [2]).

Perchè, conviene rilevarlo subito, se il Boltzmann fu un classico, lo si direbbe per le tendenze scientifiche un classico anglicizzante.

Egli raccontò una volta, che avendo richiesto di consiglio il suo maestro, lo Stefan, su le quistioni della fisica teorica, che gli conveniva approfondire, questi gli rispose ponendogli fra le mani una grammatica inglese. E il discepolo accolse

1) " Die Hauptursache des rapiden Fortschrittes der Naturwissenschaft in der letzten " Zeit liegt unzweifelhaft in der Auffindung und Vervollkommnung einer besonders geei- " gneten Forschungsmethode ".

2) Meglio ancora " Allmählich fanden die neuen Ideen in allen Gebieten Eingang. " Aus dem Gebiete der Wärmetheorie erwähne ich nur Helmholtz' berühmte Abhandlun- " gen über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. Ja, " es zeigte sich, dass sie dem Geiste der Wissenschaft besser entsprachen, als die alten " Hypothesen und auch für den Forscher selbst bequemer waren. Denn die alten Hy- " pothesen konnten nur aufrecht erhalten werden, so lange alles klappte; *jetzt aber* " *schadeten einzelne Nichtübereinstimmungen nicht mehr, denn einer blossen Analo-* " *gie kann man es nicht übel nehmen, wenn sie in einzelnen Punkten hinkt* ".

quel monito e lo seguì poi sempre nella sua rapida carriera luminosa. E all'influenza dello spirito e della coltura britannica dovette forse il Boltzmann l'equilibrio, che gli è riuscito di serbare in quarant'anni di lavoro fecondo, fra la speculazione teoretica e la sana attività sperimentale.

Una sua pagina su la natura e gli scopi della fisica teorica giova rileggere e meditare in Italia, mentre l'influenza di molteplici cause va rendendo sempre più crudo e doloroso il distacco fra i matematici e gli sperimentatori, e il Parlamento si prepara a consacrare in una legge quella che chiamano elegantemente la specializzazione della coltura.

« Die Physik ist heutzutage durch ihre vielen praktischen « Anwendungen populär geworden. Von der Tätigkeit eines « Mannes, der durch Versuche ein neues Gesetz in der Wir« kungsweise der Naturkräfte entdeckt oder auch bekannte « Gesetze bestätigt und erweitert, dürfte man sich eine Vor« stellung machen können. Aber was ist ein theoretischer « Physiker? Da letzterer gründliche mathematische Kenntnisse « besitzen muss, pflegt man seine Tätigkeit häufig die mathe« matische Physik zu nennen, jedoch nicht ganz entsprechend; « denn auch die Auswertung komplizierter physikalischer « Experimente, ja selbst die Lösung technischer Probleme, « kann weitschweifige und schwierige Rechnungen erfordern, « ist aber doch nicht der theoretischen Physik zuzuzählen. « Die theoretische Physik hat vielmehr, wie man früher sagte, « die Grundursachen der Erscheinungen aufzusuchen oder wie « man heute lieber sagt, sie hat die gewonnenen experimen« tellen Resultate unter einheitlichen Gesichtspunkten zusam« menzufassen, übersichtlich zu ordnen und möglichst klar « und einfach zu beschreiben, wodurch die Erfassung dersel« ben in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit erleichtert, ja eigen« tlich erst ermöglicht wird. Deshalb wird sie in England « auch natural philosophy genannt ».

Molti teorici pur troppo non mirano tanto alto, ma sembrano avere su la loro scienza l'opinione che Mefistofele professava a proposito della teologia

« Am besten ist's auch hier, wenn ihr nur Einen hört,
« und auf des Meisters Worte schwört.
« Im Ganzen — haltet euch an Worte!
« dann geht ihr durch die sichre Pforte
« zum Tempel der Gewissheit ein ».

Essi tengono in realtà un unico maestro, o, per essere più esatti, si restringono ad un solo indirizzo e continuano ad integrare da anni la medesima equazione differenziale. Eppure è bastato in questi ultimi tempi, che un matematico rivolgesse la sua attenzione ad un problema concreto, perchè subito ne risultassero illuminati molti fenomeni conosciuti, o se ne prevedessero di nuovi. È vero bensì, che quel matematico si chiamava Vito Volterra.

§ 2. L'attività scientifica di Ludwig Boltzmann si è svolta quasi esclusivamente in tre campi: nella termodinamica prima e nella teoria cinetica dei gas, poi nella elettrologia maxwelliana, e da ultimo nella meccanica propriamente detta. E ciò che resta di più originale e di più bello nell'opera del nostro Autore sono senza dubbio le indagini relative al secondo principio.

Carnot a suo tempo, e Clausius più tardi, avevano veduto in codesta proposizione una regola conforme ai resultati dell'esperienza, senza scrutarne però le ragioni profonde, e senza saperla ridurre alle leggi più sicure della meccanica razionale; ma il genio di Helmholtz ha lasciato in questo campo una traccia luminosa. Le sue considerazioni ad ogni modo, fondate come erano su lo studio dei fenomeni ciclici, bastavano appena a descrivere quei processi, che in termodinamica hanno nome di reversibili. E che le cose non potessero risultare diverse intende bene chi consideri che le equazioni di Lagrange sotto la seconda forma,

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q},$$

non mutano affatto quando si faccia scorrere il tempo a ritroso. La irreversibilità resta al di fuori della meccanica classica.

Helmholtz che fu grandissimo scienziato, e quindi conservatore di tendenze, non concluse di qui che si dovesse riformare la meccanica, ma piuttosto che i fenomeni irreversibili fossero tali rispetto a noi e rispetto ai mezzi di cui la fisica dispone. Era un' intuizione vaga che il Boltzmann precisò in una formola definitiva, affermando che il secondo principio della termodinamica è un teorema di calcolo delle probabilità.

Io non posso riportare in questo cenno tutte le classiche ricerche su la funzione H [1]), ma mi accontenterò di riassumerle in una forma sintetica, seguendo in parte un mirabile discorso « Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie » [2]).

La pressione esercitata da un gas su l'embolo che lo rinserra deriva da ciò che, di volta in volta, l'una o l'altra molecola, con maggiore o minore vivacità, in direzione normale od obliqua, viene ad urtare la superficie dell' embolo. Ma il numero delle molecole che entrano in giuoco, è così grande che, sopra un elemento scelto a caso della superficie stessa, l' intensità media degli urti rimane costante. La teoria cinetica preconizza dunque la meccanica statistica.

Se ora un sistema dato di corpi contiene una certa quantità di energia, questa non si tramuterà a caso di forma in forma, ma passerà anzi dalla forma meno probabile alla più probabile; che se la sua distribuzione fra i corpi del sistema non rispondeva da principio alle leggi delle probabilità vi si andrà poscia accostando per gradi.

Ma le forme di energia che si cerca di realizzare nella pratica sono appunto fra le meno probabili. Si vorrà, per esempio, spostare un corpo tutto insieme, o dare in altri termini alle molecole di cui risulta la medesima velocità, che è il caso più improbabile fra tutti.

Una probabilità maggiore corrisponde ad una forma più degradata di energia, ad una dunque sempre meno facilmente trasformabile.

1) Furono raccolte dal Boltzmann stesso nel primo volume delle sue " Vorlesungen über Gastheorie „ (Leipzig, Barth, 1896).

2) L. Boltzmann. Populäre Schriften (Leipzig, Barth, 1905, pag. 25 e seg.).

Se si prende un certo numero di palle bianche e un altro di palle nere e le si rimescolano con la mano, o si imaginano sottoposte comunque ad azioni variabili, si ritroveranno alla fine intimamente commiste. Un fatto analogo si verifica quando un corpo caldo viene a trovarsi in presenza di altri più freddi, o, che fa lo stesso, un sistema di molecole vivacemente agitate riesce in contatto intimo con altre molecole più lente. La distribuzione voluta dalle leggi delle probabilità deve stabilirsi a poco a poco e la temperatura riesce da ultimo uniforme.

Questa regola non esclude naturalmente la possibilità di utilizzare con artifizî opportuni la condizione improbabile, per ricavarne altre forme di energia, che non risulterebbero dal processo spontaneo. E così nella macchina a vapore si trasforma l'energia termica in meccanica, mentre una certa quantità di calore degrada dall'alta alla bassa temperatura.

È riuscito al Boltzmann di assegnare per ogni sistema determinato una misura esatta (quantitativa) della probabilità corrispondente alle sue condizioni attuali, e, come si vede subito, codesto valore caratteristico (la funzione H) potrà servire di modello all'entropia classica del Clausius.

Si deve anzi affermare qualche cosa di più; ogni funzione $f(\mathrm{H})$, per la quale la derivata $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{H}}$ conservi il suo segno nei limiti di variabilità necessarii, sarà infatti utilizzabile al medesimo scopo.

Il bel libro del Gibbs su la meccanica statistica costituisce in fondo lo svolgimento di codesto concetto; è dunque la descrizione di un certo numero di modelli, ugualmente accettabili (zulässig) dell'entropia termodinamica. Al quale proposito giova osservare come il Planck abbia stabilito, che la primitiva definizione del Boltzmann rimane in fondo la più semplice e la più opportuna (zweckmässig) fra le infinite definizioni possibili.

§ 3. Se le ricerche teoriche più importanti del nostro Autore spettano al campo della termodinamica, le cose sue sperimentali di maggior conto ebbero invece di mira la soluzione

di problemi relativi all'elettricità. E all'elettrologia maxwelliana in particolare.

A noi lontani sembra naturale questo interesse per una teoria di tanta importanza; ma quando il Boltzmann condusse i suoi lavori (1874), l'opinione del maggior numero era ben diversa da quella che ha voga al presente. Erano i tempi in cui i *Fortschritte der Physik* sbrigavano in 7 o 8 righe la recensione della grande memoria del Maxwell, accontentandosi di affermare che « ad ogni modo i resultati non ne erano diversi da quelli previsti dalle teorie ordinarie ».

Sotto l'influenza geniale dello Stefan, il Boltzmann seppe vedere invece che nell'opera del Maxwell qualche cosa di nuovo e di interessante ad ogni modo vi era, e si propose di verificare con una serie di misure dirette la relazione

$$n = \sqrt{K} \; . \, .$$

Le sue ricerche portarono da prima su la costante dielettrica dei gas, e condussero ad un accordo estremamente buono, come si deduce dalle cifre che qui riferisco

Gas	n	$\sqrt{K}$
Aria	1,000 293	1,000 295
Idrogeno	1,000 139	1,000 132
Anidride carbonica	1,000 454	1,000 473
Ossido di carbonio	1,000 335	1,000 345

È vero che Ayrton e Perry ricavarono dalle loro misure dei numeri, i quali non si accordano con la teoria altrettanto bene che quelli del Boltzmann, ma non è meno vero che il Klemenczicz, con un metodo completamente diverso, ritrovò molti anni più tardi (1885) i resultati del nostro Autore.

Quasi contemporaneamente attese il Boltzmann allo studio

delle costanti dielettriche dello solfo, secondo le direzioni principali, e ne ottenne questi valori numerici

	1	2	3
n	2,144	1,971	1,895
$\sqrt{K}$	2,185	1,992	1,952 ;

l'accordo non è più così buono, ma non poteva essere, come fu riconosciuto più tardi, per la natura stessa del problema. Nei corpi solidi infatti i raggi della luce si rifrangono alle volte secondo leggi quantitative diverse, da quelle che valgono per le onde più lunghe, sicchè in certi cristalli nemmeno le direzioni principali coincidono più.

Il Boltzmann tornò molti anni appresso all'elettrodinamica del Maxwell, con le sue « Vorlesungen über Maxwell' s Theorie der Elektricität und des Lichtes » [1]). Nelle quali cercò di svolgere dell'intera dottrina una esposizione rigorosa e sistematica. Il concetto dei moti ciclici, introdotto fin da principio, dà a queste lezioni una impareggiabile eleganza.

§ 4. É una caratteristica sicura dei buoni spiriti quella di rifarsi di volta in volta alla considerazione dei postulati fondamentali della meccanica. Da Galileo e Newton fino a Helmholtz e Hertz nessuno è sfuggito alla regola generale, e nemmeno Ludwig Boltzmann forma eccezione. L'impulso gli venne dall'apparire postumo dei *Principî* del Hertz; pure professando l'ammirazione più profonda per le idee originali del grande pensatore, ritenne infatti il Boltzmann che la nuova esposizione della meccanica non andasse scevra di difficoltà. Hertz sopprimeva come è noto il concetto della forza, e lo sostituiva con quello dei moti e delle masse nascoste, ma la morte immatura non gli permise pur troppo di precisare le sue idee; e nessun matematico dopo di lui ha saputo portare avanti con profitto l'opera ponderosa.

Guidato dalle sue tendenze e dalle abitudini conservatrici dello spirito il Boltzmann vide invece un altro lato del pro-

1) Leipzig, Barth, 1891 e 1898.

blema; egli pensò che non fosse venuto ancora il tempo di abbandonare le forme tradizionali, e che la meccanica classica, pure adattandosi ai nuovi e più rigidi postulati della teoria della conoscenza, potesse anzi soccorrere come per il passato ai fini dell'insegnamento e della ricerca.

Frutto di queste sue meditazioni furono i due volumi delle « Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik »[1]. Dei quali volumi, se pure non è cospicuo l'elemento nuovo ed originale, merita di essere citata a modello la forma, per il rigore e la sobrietà.

Muove il Boltzman da sette postulati, e costruisce su di essi l'intero edifizio della meccanica; e i postulati suoi sono di duplice natura. I primi due introducono l'idea degli atomi, i cinque rimanenti fissano il concetto dell'accelerazione e quello della massa.

Il fatto dell'avere egli stabilito fin da principio, e come fondamentale, l'ipotesi atomistica, merita di essere posto in evidenza, perchè rispondeva ad una convinzione del Boltzmann, maturamente radicata. Era persuaso infatti il nostro Autore che del concetto degli atomi non si potesse fare a meno in nessun modo nelle scienze naturali, e un articolo « Ueber die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft »[2] rimane fra le cose sue più interessanti e più belle.

Dimostra il Boltzmann in questo lavoro che il processo fenomenologico, secondo il quale si dovrebbero assumere delle equazioni differenziali come ipotesi prime, riposa in fondo sopra un equivoco, perchè l'operazione stessa del derivare implica un passaggio al limite sopra una serie discreta di valori. Il concetto della discontinuità è dunque implicito nei procedimenti del calcolo, e male si saprebbe come metterlo da banda.

§ 5. Io mi sono limitato finora alle cose più fondamentali che del Boltzmann ci restano, ma le ricerche minori, su le quali mi è giuocoforza sorvolare, basterebbero da sole alla fama durevole di uno scienziato. Il suo spirito sempre desto

1) Leipzig, Barth, 1897 e 1904.
2) Wied. Ann. LX, 231, 1897.

ed acuto si rivolse infatti a molti altri campi, lasciando in tutti una traccia profonda. Egli si è occupato della capillarità e della polarizzazione rotatoria, del diamagnetismo e dell' elettrostrizione, dell'elasticità susseguente e del fenomeno di Hall.

Professore di meccanica e di fisica matematica, di fisica sperimentale e di filosofia, fu grande scienziato senza essere specialista, o forse appunto perchè non era specialista.

ANTONIO GARBASSO.

ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI FUNZIONALI ALLA FISICA-MATEMATICA.

del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

CAPITOLO II.

Integrale di Gauss e sue estensioni.

1. Ferme restando le condizioni poste per la superficie σ al § 1 del Capitolo precedente, diremo *faccia positiva* della superficie σ quella rivolta verso il campo S, cioè quella che guarda la direzione positiva della normale n, diremo *faccia negativa* della superficie σ quella rivolta verso il campo S', cioè quella che guarda la direzione negativa della normale n.

Ciò premesso, ovunque si trovi nello spazio il punto $P\equiv(\xi,\eta,\zeta,)$ si costruisca la sfera di raggio 1 col centro in P e si consideri un punto generico Q della superficie ω di questa sfera e la semiretta che, partendo da P, passi per Q. Supponiamo che questa semiretta tagli la superficie σ in p punti (dai quali intendiamo escludere i punti di contatto della semiretta con σ) e indichiamo con $r_1\, r_2, \ldots r_p$ i raggi vettori che partono da P e arrivano ai detti p punti. Supponiamo ancora di avere scelto il punto Q in modo che in ognuno di questi p punti di intersezione la superficie σ abbia il piano tangente. Si consideri una porzione $\delta\omega$ del piano tangente ad ω in Q, avente questo punto nel suo interno, e si considerino ancora le porzioni $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2, \ldots \delta\sigma_p$ dei piani tangenti alla superficie σ nei p punti di intersezione, interni al cono avente per vertice il punto P e per direttrice il contorno di $\delta\omega$.

Si avrà:

$$(1) \qquad \delta\omega = \pm \frac{d\frac{1}{r_i}}{dn}\delta\sigma_i + \mathrm{D}.\varepsilon_i.\delta\sigma_i\,,$$

dove D è una quantità fissa ed ε_i è dello stesso ordine di piccolezza della massima dimensione di $\delta\sigma_i$. In questa formola si prenderà il segno + o il segno —, in modo che l'espressione

$$\pm \frac{d\frac{1}{r_i}}{dn} = \mp \frac{1}{r_i^2}\left(\cos\widehat{r_i x}.\cos\widehat{nx} + \cos\widehat{r_i y}.\cos\widehat{ny} + \right.$$
$$\left. + \cos\widehat{r_i z}.\cos\widehat{nz}\right) = \mp \frac{\cos\widehat{r_i n}}{r_i^2}$$

risulti sempre positiva; di modo che in ognuno dei p punti di intersezione si prenderà il segno + o il segno —, secondochè in esso punto la superficie σ volge al punto P la sua faccia positiva o la negativa; ossia, se si conviene di chiamare ***punti di entrata*** rispetto al punto P quei punti nei quali la superficie σ volge a P la sua faccia negativa, ***punti di uscita*** quelli nei quali la superficie σ volge a P la sua faccia positiva, si prenderà nella formola (1) il segno + o il segno —, secondochè il corrispondente punto di intersezione è di uscita o di entrata.

Supponiamo che i detti p punti di intersezione siano formati di p' punti di uscita e di p'' punti di entrata; allora sarà:

$$(2) \qquad \sum_1^p {}_i \frac{d\frac{1}{r_i}}{dn}\delta\sigma_i = (p'-p'')\delta\omega + D\sum_1^p {}_i \pm \varepsilon_i.\delta\sigma_i .$$

2. Supponiamo che il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ non sia su σ. Per calcolare l'***integrale di Gauss***:

$$(3) \qquad \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma ,$$

si può procedere nel seguente modo: Si consideri una superficie poliedrica circoscritta alla sfera di raggio 1 col centro in P; si costruiscano i coni aventi per vertice comune il punto P e ognuno per direttrice il contorno di una faccia $\delta\omega$ del poliedro; si tirino le semirette che vanno dal punto P ai punti di contatto delle facce del poliedro con la sfera; si considerino

i piani tangenti a σ nei punti in cui queste semirette intersecano σ [1]), senza essere tangenti a σ, e le porzioni $\delta\sigma_i$ di questi piani tangenti, interna ognuna al cono che contiene nel suo interno il relativo punto di contatto; si calcoli per ogni porzione $\delta\sigma_i$ l'espressione $\dfrac{d\frac{1}{r_i}}{dn}\delta\sigma_i$ e si faccia la somma di tutte le espressioni così ottenute; il limite di questa somma, quando le facce $\delta\omega$ del poliedro impiccoliscono indefinitamente, sarà uguale al valore dell'integrale (3).

Ora in virtù della formola (2) la detta somma si può esprimere nel seguente modo:

$$\Sigma_i \frac{d\frac{1}{r_i}}{dn}\delta\sigma_i = \Sigma(p'-p'')\delta\omega + D\Sigma_i \pm \varepsilon_i \delta\sigma_i ,$$

dove il secondo sommatorio si estende a tutte le facce $\delta\omega$ della superficie poliedrica circoscritta alla suddetta sfera; sicchè, facendo impiccolire indefinitamente le facce di questa superficie poliedrica, si avrà:

$$(4) \qquad \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_\omega (p'-p'')d\omega ,$$

il secondo integrale essendo esteso a tutta la superficie ω della sfera di centro P e di raggio 1. I numeri p' e p'', che compariscono sotto il secondo integrale, indicano rispettivamente i numeri dei punti di uscita e di entrata in cui la semiretta ρ, che parte da P e va al punto variabile di ω, incontra la superficie σ.

Nello stesso modo che si è ottenuta la formola (4), si otterranno le altre seguenti:

1) La superficie poliedrica, circoscritta alla superficie sferica ω, si può sempre sceglierla in modo che la superficie σ nei detti punti di intersezione ammetta un piano tangente determinato.

$$(5)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_\sigma\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_\omega\cos^2\widehat{\rho x}.(p'-p'')d\omega\,,\\[2ex]\displaystyle\int_\sigma\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_\omega\cos\widehat{\rho x}.\cos\widehat{\rho y}.(p'-p'')d\omega\,,\\[2ex]\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

3. Supponiamo ora che il punto P sia sulla superficie σ. Si stacchi da σ una porzione σ' contenente nel suo interno il punto P. In questo modo il punto P è discosto dalla superficie rimanente $\sigma-\sigma'$; e quindi, indicando con p'_1, p''_1 i numeri p', p'' relativi a $\sigma-\sigma'$, si potrà scrivere:

$$\int_{\sigma-\sigma'}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_\omega(p'_1-p''_1)d\omega\,.$$

Nei punti di ω, che non corrispondono a punti di σ', la differenza $p'_1-p''_1$ coincide con l'altra $p'-p''$ relativa a tutta la superficie σ. Inoltre, impiccolendo σ', varierà la differenza $p'_1-p''_1$ nei punti di ω corrispondenti ai punti di σ', in modo che ogni qualvolta un punto di ω non fa più parte della regione corrispondente ai punti di σ', il numero $p'_1-p''_1$ diventa $p'-p''$; e poichè il numero $p'-p''$ relativo a σ è finito per qualunque vettore che parte da P, poichè ancora l'espressione $p'-p''$, considerata come funzione dei punti di ω, ha tutt'al più un numero finito di linee di discontinuità, facendo impiccolire indefinitamente σ' con una legge qualsiasi, si avrà:

$$\int_\sigma\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\lim_{\sigma'=0}\int_{\sigma-\sigma'}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\lim_{\sigma'=0}\int_\omega(p'_1-p''_1)d\omega=\int_\omega(p'-p'')d\omega\,.$$

Adunque la formola (4) vale anche quando il punto P si trova su σ.

Lo stesso si può dimostrare per le formole (5).

4. Passiamo ora a calcolare i valori degli integrali (4), (5) nelle diverse ipotesi che il punto P sia interno ad S, o ad S', oppure sia su σ.

Supposto dapprima che il punto P sia interno ad S, osserveremo che ogni semiretta, che si spicca da P, deve dapprima incontrare la superficie σ necessariamente in un punto di uscita e può in seguito incontrare la superficie σ in un numero pari di punti alternativamente di entrata e di uscita; sicchè in questo caso sarà in ogni punto di ω.

$$p' - p'' = 1;$$

e quindi dalle (4), (5) risulterà:

$$\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_\omega d\omega, \quad \int_\sigma \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_\omega \cos^2 \widehat{px}\, d\omega,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_\omega \cos\widehat{px}.\cos\widehat{py}\, d\omega, \; \ldots\ldots$$

Introducendo le coordinate polari col polo nel punto P, risulterà da queste formole per P interno al campo S:

$$(6) \qquad \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 4\pi, \quad \int \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 0, \; \ldots\ldots$$

Si supponga ora il punto P interno al campo infinito S'. In questo caso ogni semiretta, che si spicca da P, o non incontra mai la superficie σ o l'incontra necessariamente in un numero pari di punti alternativamente di entrata e di uscita; sicchè si avrà in tutti i punti di ω:

$$p' - p'' = 0;$$

e quindi per P interno al campo infinito S' risulterà:

$$(6)'\quad \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_\sigma\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_\sigma\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\ldots=0.$$

Supponiamo finalmente che il punto P sia su σ e che ivi la superficie ammetta un piano tangente determinato. In questo caso la superficie ω viene scomposta dal detto piano tangente in due parti uguali ω', ω''; una parte ω' sarà incontrata dalla direzione positiva della normale in P, l'altra parte ω'' sarà incontrata dalla direzione negativa di detta normale. Ogni semiretta, che parte da P e incontra ω', dovrà incontrare la superficie σ necessariamente in un punto di uscita e potrà in seguito incontrare σ in un numero pari di punti alternativamente di entrata e di uscita; sicchè nei punti di ω' si avrà:

$$p'-p''=1\,.$$

Ogni semiretta, che parte da P e incontra ω'', o non incontra mai la superficie σ, o, se l'incontra, l'incontrerà in un numero pari di punti successivamente di entrata e di uscita; sicchè nei punti di ω'' sarà:

$$p'-p''=0\,.$$

Adunque avremo:

$$\int_\sigma\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_{\omega'}d\omega\,,\quad \int_\sigma\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_{\omega'}\cos^2\widehat{px}\,d\omega\,,$$

$$\int_\sigma\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int_{\omega'}\cos\widehat{px}.\cos\widehat{py}\,d\omega\,,\ \ldots.\,;$$

ed introducendo le coordinate polari col polo nel punto P, risulterà:

$$(6)^* \qquad \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=2\pi\,, \quad \int_\sigma \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\frac{2}{3}\pi\,,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=0\,,\ \ldots.$$

In modo perfettamente analogo si può operare nei casi in cui P è un punto conico o un punto di linea diedrale.

5. Indichiamo con t il massimo numero dei punti in cui una retta qualsiasi dello spazio incontra la superficie σ. Sarà sempre:

$$p'+p''\leq t\,;$$

e quindi, ovunque si trovi il punto P, si avrà:

$$\int_\sigma \left|\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|d\sigma=\int_\omega (p'+p'')d\omega<4\pi t\,, \quad \int_\sigma \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\left|\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|d\sigma<\int_\omega (p'+p'')d\omega<4\pi t\,,$$

$$\int_\sigma \left|\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|d\sigma<4\pi t\,,\ \ldots..$$

Doppio strato e sue estensioni.

6. Sia h una funzione finita e continua dei punti della superficie σ e sia P' un punto generico di σ, nel quale però esista un piano tangente determinato. Indichiamo con h' il valore della funzione h nel punto P' e con r' i raggi vettori che partono da P'. Data ad arbitrio una quantità positiva ε, si può staccare da σ una porzione σ' di superficie tale che contenga il punto P' nel suo interno e che per qualunque suo punto si abbia:

$$|h-h'|<\varepsilon\,.$$

Allora si potrà scrivere:

$$\left|\int_{\sigma'} (h-h')\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma\right| \leq \int_{\sigma'} |h-h'|\,.\left|\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right| d\sigma < 4\pi.t.\varepsilon\ ,$$

$$\left|\int_{\sigma'} (h-h')\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}d\sigma\right| < 4\pi.t.\varepsilon\ .$$

È chiaro ancora che si può considerare un intorno del punto P' nello spazio (ad esempio una sfera col centro in P'), tale che per qualunque suo punto P risulti:

$$\left|\int_{\sigma-\sigma'} (h-h')\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma - \int_{\sigma-\sigma'} (h-h')\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}d\sigma\right| < \varepsilon\ .$$

Riassumendo, si avrà per tutti i punti P di detto intorno:

$$\left|\int_{\sigma} (h-h')\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma - \int_{\sigma} (h-h')\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}d\sigma\right| < \varepsilon + 4\pi.t.\varepsilon + 4\pi.t.\varepsilon = (1+8\pi.t)\varepsilon\ .$$

Risulta quindi:

$$(7)\qquad \lim_{P=P'}\int_{\sigma} (h-h')\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma = \int_{\sigma} (h-h')\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}d\sigma\ ,$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P dello spazio si avvicina al punto P' di σ.

Ora si ha identicamente, ovunque si trovi il punto P dello spazio,

$$\int_{\sigma} h\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma = h'\int_{\sigma}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma + \int_{\sigma} (h-h')\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma\ ,$$

ed ancora, in virtù della prima delle (6)'',

$$\int_\sigma h \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma = 2\pi h' + \int_\sigma (h-h') \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma .$$

Per cui, se il punto P si avvicina a P' mantenendosi sempre nell'interno del campo S, si avrà, in virtù della prima delle (6) e della (7),

$$(8) \qquad \lim_{P=P'} \int_\sigma h \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 4\pi h' + \int_\sigma (h-h') \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma =$$

$$= 2\pi h' + \int_\sigma h \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma ;$$

se il punto P si avvicina a P' mantenendosi sempre nell'interno del campo S', si avrà, in virtù della prima delle (6)' e della (7),

$$(9) \quad \lim_{P=P'} \int_\sigma h \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_\sigma (h-h') \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma = -2\pi h' + \int_\sigma h \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma .$$

Nello stesso modo, facendo uso delle (6), (6)', (6)'', si avrà, se il punto P si avvicina a P' mantenendosi nel campo S,

$$(8)' \quad \begin{cases} \lim_{P=P'} \int_\sigma h \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \frac{2}{3}\pi h' + \int_\sigma h \left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma , \\ \lim_{P=P'} \int_\sigma h \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int_\sigma h \frac{\partial r'}{\partial x} \frac{\partial r'}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma , \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$$

se il punto P si avvicina a P' mantenendosi nel campo S',

$$(9)' \begin{cases} \lim_{P=P'} \int_\sigma h \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -\frac{2}{3}\pi h' + \int_\sigma h \left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma , \\ \lim_{P=P'} \int_\sigma h \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int h \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le formole (8), (9) sono le note formole di discontinuità di un *doppio strato*, le formole (8)', (9)' rappresentano alcune estensioni delle formole (8), (9).

Pseudo-doppi strati elastici.

7. Si considerino gli integrali:

$$(10) \begin{cases} U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma u \, d\sigma , \quad V(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma u \, d\sigma , \\ W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma u \, d\sigma , \end{cases}$$

dove, in conformità delle posizioni fatte al Capitolo precedente, è:

$$(11) \begin{cases} X'_\sigma = \left\{\frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \quad Y'_\sigma = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \\ Z'_\sigma = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} ; \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} X''_\sigma = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \quad Y''_\sigma = \left\{\frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \\ Z''_\sigma = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} ; \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} X''_\sigma = \dfrac{3k}{2+k}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{dn}, \quad Y''_\sigma = \dfrac{3k}{2+k}\dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{dn}, \\ Z''_\sigma = \left\{\dfrac{2}{2+k} + \dfrac{3k}{2+k}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right\}\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{dn}, \end{cases}$$

e dove si suppone che le funzioni u, v, w dei punti della superficie σ siano finite e continue.

Chiameremo il sistema (10), formato dalle funzioni U, V, W, un *sistema di pseudo-doppi strati elastici*.

Consideriamo sulla superficie σ un sistema di coordinate curvilinee α, β; poniamo $P' \equiv (\alpha' \beta')$ ed ancora:

$$(14)\quad \begin{cases} X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \left\{\dfrac{2}{2+k} + \dfrac{3k}{2+k}\left(\dfrac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\right\}\dfrac{d\dfrac{1}{r'}}{dn}, \\ Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \dfrac{3k}{2+k}\dfrac{\partial r'}{\partial x}\dfrac{\partial r'}{\partial y}\dfrac{d\dfrac{1}{r'}}{dn}, \ \ldots ; \\ X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \dfrac{3k}{2+k}\dfrac{\partial r'}{\partial y}\dfrac{\partial r'}{\partial x}\dfrac{d\dfrac{1}{r'}}{dn}, \ \ldots ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} U(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') u d\sigma, \\ V(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') u d\sigma, \ \ldots\ldots \end{cases}$$

In virtù della supposta continuità delle funzioni u, v, w che compariscono nelle espressioni (10) ed in virtù ancora delle formole (8), (8)', (9), (9)', *si avrà, se il punto* $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *si avvicina indefinitamente al punto* $P' \equiv (\alpha' \beta')$ *di* σ, *mantenendosi sempre nell'interno del campo finito* S,

$$(16)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=P'} U(\xi,\eta,\zeta) = u(\alpha',\beta') + U(\alpha',\beta')\,, \\ \lim\limits_{P=P'} V(\xi,\eta,\zeta) = v(\alpha',\beta') + V(\alpha',\beta')\,, \ldots, \end{cases}$$

se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ ***si avvicina indefinitamente al punto*** $P' \equiv (\alpha', \beta')$ *di* σ, ***mantenendosi sempre nell'interno del campo infinito*** S',

$$(16)'\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=P'} U(\xi,\eta,\zeta) = -u(\alpha',\beta') + U(\alpha',\beta')\,, \\ \lim\limits_{P=P'} V(\xi,\eta,\zeta) = -v(\alpha',\beta') + V(\alpha',\beta')\,, \ldots. \end{cases}$$

Strati elastici e corrispondenti pseudo-tensioni.

8. Facciamo ora sulla superficie σ le seguenti ipotesi:

1° Ammetta un piano tangente determinato in ogni suo punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° Esista un numero fisso positivo α tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle direzioni positive delle normali n, n' in due punti qualsiasi p, p' di σ e con r' il vettore $\overline{pp'}$, si abbia:

$$\widehat{nn'} < \alpha\, r'.$$

Le precedenti condizioni geometriche sono verificate certamente per le superficie a curvatura finita.

Ciò premesso, fissiamo un punto generico P' sulla superficie σ ed indichiamo con n' la direzione positiva della normale a σ in questo punto. Consideriamo gli integrali:

$$(17)\quad \begin{cases} u_1(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X_\sigma\, u' d\sigma\,, \quad v_1(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X_\sigma\, u'' d\sigma\,, \\ w_1(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X_\sigma\, u''' d\sigma\,, \end{cases}$$

dove $u', v', w'; u'', \ldots; u''', \ldots$ sono le funzioni date dalle formole (5), (5)' del Capitolo precedente, e dove X_σ, Y_σ, Z_σ sono fun-

zioni finite e continue qualsiasi dei punti della superficie σ. Chiameremo il sistema di funzioni (17) un *sistema di strati elastici*.

Avuto riguardo al fatto che le funzioni u', v', w' ; u'', ... ; u''',...., quando il punto (ξ, η, ζ) si avvicina al punto (x, y, z), si comportano come la funzione $\frac{1}{r}$, ne segue che *le funzioni* $u_1(\xi, \eta, \zeta)$, $v_1(\xi, \eta, \zeta)$, $w_1(\xi, \eta, \zeta)$ *sono finite e continue in tutti i punti* $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *dello spazio, i punti della superficie* σ *inclusi.*

9. Si considerino le espressioni :

$$
\begin{cases}
U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = (\frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'z}) + \\
\quad + k (\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi}) \cos \widehat{n'x} + \frac{k}{2+k} (\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'y} + \\
\quad + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'z} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'x} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'x}) , \\
V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = (\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'z}) + \\
\quad + k (\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}) \cos \widehat{n'y} + \frac{k}{2+k} (\frac{\partial w_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'z} + \\
\quad + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'x} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'y} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'y}) , \\
W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'z}) + \\
\quad + k (\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}) \cos \widehat{n'z} + \frac{k}{2+k} (\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'x} + \\
\quad + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \cos \widehat{n'y} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cos \widehat{n'z} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \cos \widehat{n'z}) ,
\end{cases}
\tag{18}
$$

nelle quali per il momento si suppone che il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ sia discosto dalla superficie σ. Se si eseguiscono i calcoli indicati ai secondi membri di queste formole e se si pone :

$$\frac{\delta}{\delta n'}=\frac{\partial}{\partial \xi}\cos\widehat{n'x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\cos\widehat{n'y}+\frac{\partial}{\partial \zeta}\cos\widehat{n'z}\ ,$$

$$X'_1=\frac{2}{2+k}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ,\quad Y'_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ,$$

$$Z'_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ;$$

$$X''_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ,\quad Y''_1=\frac{2}{2+k}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ,$$

$$Z''_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ;$$

$$X'''_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'}\ ,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots,$$

è facile verificare che si ha:

$$(18)'\quad\begin{cases} U^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_1 X_\sigma\, d\sigma\ ,\quad V^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_1 X_\sigma\, d\sigma,\\[2ex] W^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'''_1 X_\sigma\, d\sigma\ .\end{cases}$$

Alle espressioni $U^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'$, $V^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'$, $W^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'$, si può dare la seguente interpetrazione. Si consideri una superficie chiusa σ_1 passante per il punto P, la quale abbia tutti i suoi punti discosti da σ e nel punto P abbia la normale parallela alla direzione n'. Se il punto P appartiene ad S, le espressioni (18)' rappresentano i valori nel punto P delle componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ_1, corrispondenti alla deformazione, avente per componenti le (17), di un mezzo elastico, il quale occupa il campo finito limitato da σ_1; se il punto P appartiene ad S', le espressioni (18)', cambiate di segno, rappresentano i valori nel punto P delle componenti delle pseudotensioni nei punti di σ_1, corrispondenti alla deformazione,

avente per componenti le (17), di un mezzo elastico, il quale occupa il campo infinito limitato da σ_1.

10. Si ha identicamente:

$$
(18)' \left\{ \begin{aligned}
U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma X_\sigma \, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma (X'_\sigma + X'_1) X_\sigma \, d\sigma , \\
V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma X_\sigma \, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma (X''_\sigma + X''_1) X_\sigma \, d\sigma , \\
W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' &= -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma X_\sigma \, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma (X'''_\sigma + X'''_1) X_\sigma \, d\sigma ,
\end{aligned} \right.
$$

dove X'_σ, Y'_σ, Z'_σ; X''_σ, ...; X'''_σ, ... rappresentano le espressioni date dalle formole (11), (12), (13).

Notiamo anzitutto che si ha:

$$
X'_\sigma + X'_1 = \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \right\} \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta n'} \right) =
$$

$$
= \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{rn'} - \cos \widehat{rn}}{r^2} ;
$$

ed ancora, se si considera un triedro avente gli spigoli paralleli alle direzioni n, n', r, e si indica con B il rettilineo del diedro di questo triedro, che ha lo spigolo parallelo alla direzione n, si ha dalla trigonometria:

$$
\frac{\cos \widehat{rn'} - \cos \widehat{rn}}{r} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{n'n} . \operatorname{sen} \widehat{rn} . \cos B - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\widehat{nn'}}{2} \cos \widehat{rn}}{r} =
$$

$$
= \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{nn'}}{2}}{\frac{r'}{2}} \left\{ \cos \frac{\widehat{nn'}}{2} . \operatorname{sen} \widehat{rn} . \cos B - \operatorname{sen} \frac{\widehat{nn'}}{2} . \cos \widehat{rn} \right\} \frac{r'}{r} ,
$$

ove indichiamo con r' il vettore che parte dal punto P' e va al punto variabile $p \equiv (x, y, z)$ di σ. Se si considera un trie-

dro, avente due facce rispettivamente uguali a $\frac{\widehat{nn'}}{2}$, $\widehat{rn}$ e il diedro compreso uguale a B, risulta:

$$\cos\frac{\widehat{nn'}}{2}.\mathrm{sen}\,\widehat{rn}.\cos B - \mathrm{sen}\frac{\widehat{nn'}}{2}.\cos\widehat{rn} = -\cos b.\cos C\,,$$

dove indichiamo con b la faccia opposta al diedro B, con C il diedro opposto alla faccia uguale a $\frac{\widehat{nn'}}{2}$. E se supponiamo, per un momento, che il punto P sia sulla normale n', si potrà scrivere ancora:

$$\frac{\cos\widehat{rn'} - \cos\widehat{rn}}{r} = -\frac{\mathrm{sen}\frac{\widehat{nn'}}{2}}{\frac{r'}{2}}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\widehat{rn'}}{\mathrm{sen}\,\widehat{r'n'}}\cdot\cos b\,.\cos C\,.$$

In virtù dell' ipotesi 2ª fatta al § 8 sulla natura della superficie σ, si ha, indipendentemente dalla posizione del punto P' su σ,

$$\left|\frac{\mathrm{sen}\frac{\widehat{nn'}}{2}}{\frac{r'}{2}}\right| < \alpha\,;$$

ed ancora, indicato con M il limite superiore (indipente da ξ, η, ζ) dei valori assoluti della espressione:

$$\left\{\frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\} X_\sigma$$

e fissate una quantità positiva τ inferiore all'unità e una quantità ε positiva e piccola ad arbitrio, si può scegliere, indipendentemente dalla posizione del punto P' su σ, un segmento δ tale che nella porzione σ' di σ, i cui punti distano da n' non più di δ, si abbia:

$$|\,\mathrm{sen}\,\widehat{r'n'}\,| \geq \tau\,, \qquad \frac{\alpha M}{\tau}\int_{\sigma'}\frac{d\sigma}{r'} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Di qui risulta intanto:

$$\left|\int_{\sigma'}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{rn'}-\cos\widehat{rn}}{r^2}X_\sigma\,d\sigma\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\int_{\sigma'}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{r'n'}-\cos\widehat{r'n}}{r'^2}X_\sigma\,d\sigma\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Dipendentemente poi dalla scelta di δ e indipendentemente dalla posizione di P' su σ, si può fissare un segmento δ' tale che per $\overline{PP'}<\delta'$ sia:

$$\left|\int_{\sigma-\sigma'}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{rn'}-\cos\widehat{rn}}{r^2}X_\sigma\,d\sigma-\right.$$

$$\left.-\int_{\sigma-\sigma'}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{r'n'}-\cos\widehat{r'n}}{r'^2}X_\sigma\,d\sigma\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Si può dunque scrivere per P su n' e per $\overline{PP'}<\delta'$:

$$\left|\int_{\sigma}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{rn'}-\cos\widehat{rn}}{r^2}X_\sigma\,d\sigma-\right.$$

$$\left.-\int_{\sigma}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{r'n'}-\cos\widehat{r'n}}{r'^2}X_\sigma\,d\sigma\right|<\varepsilon.$$

In modo analogo si dimostra che, data una quantità positiva ε comunque piccola, si può trovare, indipendentemente dalla posizione di P' su σ, un segmento δ'' tale che, indicando con r'' i vettori che partono da un punto P'' qualsiasi di σ e con n'' la normale in P'', si abbia, per tutti i punti P'' che distano da P' non più di δ'',

$$\left|\int_{\sigma}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r''}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{r''n''}-\cos\widehat{r''n}}{r''^2}X_\sigma\,d\sigma-\right.$$

$$\left.-\int_{\sigma}\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\cos\widehat{r'n'}-\cos\widehat{r'n}}{r'^2}X_\sigma\,d\sigma\right|<\varepsilon.$$

Questa formula e la precedente, unite al fatto che la quantità δ' può essere fissata indipendentemente dalla posizione di P' su σ, ci portano a concludere che si ha:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} &\lim_{P=P'} \int_\sigma \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{rn'} - \cos \widehat{rn}}{r^2} X_\sigma \, d\sigma = \\ &= \int_\sigma \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'n'} - \cos \widehat{r'n}}{r'^2} X_\sigma \, d\sigma , \end{aligned} \right.$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P si avvicina al punto P' di σ.

11. Osserviamo che l'espressione

$$\frac{2}{2+k} \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} = \left\{ \frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\cos \widehat{r'n'}}{r'^2}$$

si può ottenere dall'espressione $X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$, data dalla prima delle (14), scambiando α e β rispettivamente con α' e β'; sicchè la (19) può scriversi:

$$(19)' \quad \lim_{P=P'} \int_\sigma (X'_\sigma + X'_i) X_\sigma \, d\sigma = \int_\sigma \left\{ X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') + X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \right\} X_\sigma \, d\sigma$$

Tenendo conto della (19)' e delle formole analoghe, che qui non scriviamo, risulta:

$$\lim_{P=P'} \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma (X'_\sigma + X'_i) X_\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \{ X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') + X'_\sigma(\alpha' \beta'; \alpha, \beta) \} X_\sigma \, d\sigma ,$$

$$\lim_{P=P'} \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma (X''_\sigma + X''_i) X_\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \{ X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') + X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \} X_\sigma \, d\sigma ,$$

$$\lim_{P=P'} \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma (X'''_\sigma + X'''_i) X_\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \{ X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') + X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \} X_\sigma \, d\sigma ,$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P si avvicina al punto P' di σ; ed allora, indicando con $X_\sigma(\alpha', \beta')$, $Y_\sigma(\alpha' \beta')$,

$Z'_\sigma(\alpha', \beta')$ i valori nel punto $P' \equiv (\alpha', \beta')$ delle funzioni X_σ, Y_σ, Z_σ, e ponendo:

$$U^{(1)}(\alpha', \beta')' = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta)\, X_\sigma(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

$$V^{(1)}(\alpha', \beta')' = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta)\, X_\sigma(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

$$W^{(1)}(\alpha', \beta')' = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta)\, X_\sigma(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

in virtù delle formole (16), (16)' e delle (18)'', *si avrà, se il punto* $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *si avvicina indefinitamente al punto* $P'(\alpha', \beta')$ *di* σ *in una direzione qualsiasi, mantenendosi però sempre nell'interno del campo finito* S,

$$(20)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=P'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -X_\sigma(\alpha', \beta') + U^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim\limits_{P=P'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -Y_\sigma(\alpha', \beta') + V^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim\limits_{P=P'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -Z_\sigma(\alpha' \beta') + W^{(1)}(\alpha', \beta')'; \end{cases}$$

se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *si avvicina indefinitamente al punto* $P' \equiv (\alpha' \beta')$ *di* σ *in una direziore qualsiasi, mantenendosi però sempre nell' interno del campo infinito* S',

$$(20)'\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=P'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = X_\sigma(\alpha', \beta') + U^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim\limits_{P=P'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = Y_\sigma(\alpha', \beta') + V^{(1)}(\alpha', \beta')', \\ \lim\limits_{P=P'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = Z_\sigma(\alpha', \beta') + W^{(1)}(\alpha', \beta')'. \end{cases}$$

In armonia alla interpetrazione data alla fine del § 9 alle espressioni $U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, $V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, $W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)'$, le espressioni (20) si possono considerare come le componenti delle pseudotensioni nei punti di σ, corrispondenti alla deformazione, avente

per componenti le (17), di un mezzo elastico il quale occupa il campo finito S; le espressioni (20)' si possono considerare come le componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ, corrispondenti alla deformazione, avente per componenti le (17), di un mezzo elastico il quale occupa il campo infinito S'.

Per $k=0$ le formole (20), (20)' si riducono rispettivamente alle note formole di discontinuità delle derivate normali degli strati:

$$(21) \qquad \lim_{P=P'} \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\sigma X_\sigma \frac{d\sigma}{r} \right\} = - X_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma X_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\sigma$$

per P variabile nel campo finito S,

$$(21)' \qquad \lim_{P=P'} \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\sigma X_\sigma \frac{d\sigma}{r} \right\} = X_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma X_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} d\sigma$$

per P variabile nel campo infinito S'.

SULLA DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI ALCUNE FUNZIONI PER MEZZO DEI DATI SPERIMENTALI.

FERNANDO DE HELGUERO.

In molti problemi di fisica si incontrano delle funzioni del tipo

$$y(t) = \Sigma_i A_i e^{-\lambda_i t},$$

colle A_i e λ_i costanti, delle quali si possono conoscere sperimentalmente i valori corrispondenti a qualche valore particolare di t, od anche a qualunque valore di t fra 0 ed ∞.

Si presenta allora il problema di trovare per mezzo di questi dati i valori delle A_i e delle λ_i. Di questo io mi occupo, limitandomi al caso che la y sia formata solo da due o tre componenti esponenziali.

Perciò premetto la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche, al quale, nei casi che considererò, si riconduce il problema.

Sia il sistema

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \alpha, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 &= \beta, \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 &= \gamma, \\ x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 &= \delta, \end{aligned}$$

nel quale le x_1, x_2, y_1, y_2 sono incognite e le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ note, costanti.

Poniamo

$$x_1 = x'_1 \alpha \qquad y_1 = \frac{\beta + z_1 \sqrt[3]{H}}{\alpha} \qquad K = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{H^{2/3}}$$

$$x_2 = x'_1 \alpha \qquad y_2 = \frac{\beta + z_2 \sqrt[3]{H}}{\alpha}$$

dove $H = \alpha^2\delta - 3\alpha\beta\gamma + 2\beta^3$. Si giunge facilmente al nuovo sistema

$$1) \qquad x'_1 + x'_2 = 1$$

$$2) \qquad x'_1 z_1 + x'_2 z_2 = 0$$

$$3) \qquad x'_1 z^2_1 + x'_2 z^2_2 = k$$

$$4) \qquad x'_1 z^3_1 + x'_2 z^3_2 = 1$$

nelle quattro nuove incognite x'_1, x'_2, z_1, z_2.

Dalla 2) si ha

$$2') \qquad x'_1 z_1 = - x'_2 z_2 ,$$

e sostituendo nelle ultime due:

$$3') \qquad x'_1 z_1 (z_1 - z_2) = k$$

$$4') \qquad x'_1 z_1 (z^2_1 - z^2_2) = 1 ,$$

e dividendo la seconda per la prima

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{K} .$$

Eliminando x'_2 fra la 1) e 2')

$$x'_1 (z_1 - z_2) = - z_2 ,$$

e dividendo per questa la 3'):

$$z_1 z_2 = - K .$$

Perciò z_1 e z_2 sono le radici dell'equazione

$$z^2 - \frac{1}{K} z - K = 0 .$$

Le x'_1 e x'_2 son date dalle 1) e 2).

Risulta perciò chiaro il seguente procedimento pratico per la risoluzione del sistema proposto:

Colle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si formino:

$$H = \alpha^2\delta - 3\alpha\beta\gamma + 2\beta^3,$$

$$K = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{H^{2/3}};$$

si trovino z_1 e z_2 dalla

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4K^3}}{2K}.$$

Le incognite sono allora date da

$$x_1 = \frac{\alpha z_2}{z_2 - z_1}, \quad x_2 = \alpha - x_1,$$

$$y_1 = \frac{\beta + z_1 H^{1/3}}{\alpha}, \quad y_2 = \frac{\beta + z_2 H^{1/3}}{\alpha}.$$

Ciò posto, facciamo vedere come a questo si riconduce il problema che ci interessa.

Supponiamo anzitutto che le componenti della curva che consideriamo siano due sole, cioè la sua equazione sia

$$y = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Se di questa si conoscono tutti i valori per t compreso fra 0 ed $+\infty$ possiamo considerare gli integrali

$$\int_0^\infty t^n y \, dt$$

per $n = 0, 1, 2 \ldots.$ che diremo *momenti di ordine n* e indicheremo con μ_n. Il momento di ordine zero (μ_0) è l'area, e questo, come tutti gli altri momenti, possono o calcolarsi mediante i dati empirici, se questi sono numerici, od ottenersi graficamente mediante l'integrafo, sè è data la curva corrispondente alla funzione y (t).

Vogliamo esprimere i parametri A e λ in funzione dei primi momenti μ_n.

Premettiamo alcune formule.

Notiamo che per $n > 0$:

$$\int_0^\infty t^n A_i e^{-\lambda_i t} dt = -\frac{A_i}{\lambda_i} \int_0^\infty t^n d\, e^{-\lambda_i t}$$

$$= -\frac{A_i}{\lambda_i} \left\{ \left[t^n e^{-\lambda_i t} \right]_0^\infty - n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda_i t} dt \right\}$$

$$= \frac{n}{\lambda_i} \int_0^\infty t^{n-1} A_i e^{-\lambda_i t} dt,$$

e che

$$\int_0^\infty A_i e^{-\lambda_i t} dt = -\frac{A_i}{\lambda_i} \left[e^{-\lambda_i t} \right]_0^\infty = \frac{A_i}{\lambda_i},$$

onde applicando ripetutamente la prima relazione e tenendo conto della seconda:

$$(5) \qquad \int_0^\infty t^n A_i e^{-\lambda_i t} dt = \frac{n!\, A_i}{\lambda_i^{n+1}}.$$

Da questa facendo $i = 1, 2$ e sommando si ha per n qualunque

$$n! \left\{ \frac{A_1}{\lambda_1^{n+1}} + \frac{A_2}{\lambda_2^{n+1}} \right\} = \mu_n .$$

Se diamo ad n i valori 0, 1, 2, 3 si ottiene il sistema di equazioni:

$$(\text{II}) \qquad \begin{cases} \dfrac{A_1}{\lambda_1} + \dfrac{A_2}{\lambda_2} = \mu_0 , \\[2ex] \dfrac{A_1}{\lambda_1^2} + \dfrac{A_2}{\lambda_2^2} = \mu_1 , \\[2ex] \dfrac{A_1}{\lambda_1^3} + \dfrac{A_2}{\lambda_2^3} = \dfrac{\mu_2}{1.2} , \\[2ex] \dfrac{A_1}{\lambda_1^4} + \dfrac{A_2}{\lambda_2^4} = \dfrac{\mu_3}{1.2.3} , \end{cases}$$

che colle posizioni

$$\frac{A_1}{\lambda_1} = x_1, \quad \frac{1}{\lambda_1} = y_1,$$

$$\frac{A_2}{\lambda_2} = x_2, \quad \frac{1}{\lambda_2} = y_2,$$

si riconduce subito al sistema (I), dove

$$\alpha = \mu_0, \quad \beta = \mu_1, \quad \gamma = \frac{\mu_2}{2}, \quad \delta = \frac{\mu_3}{6}.$$

Se invece non si conoscono tutti i valori di $y(t)$ corrispondenti a t fra 0 ed ∞, ma solo alcuni, la risoluzione è ancora possibile quando si conoscono quattro valori corrispondenti a valori di t in progressione aritmetica, cioè ad intervalli di tempo costanti.

Si conoscano le $y(t)$ per $t = t_1, t_1 + \tau, t_1 + 2\tau, t_1 + 3\tau$.

Avremo, sostituendo,

$$y_i = A_1 e^{-\lambda_1(t_1 + i\tau)} + A_2 e^{-\lambda_2(t_1 + i\tau)} \text{ per } i = 0, 1, 2, 3.$$

Poniamo

$$A_1 e^{-\lambda_1 t_1} = x_1, \quad A_2 e^{-\lambda_2 t_1} = x_2,$$

$$e^{-\lambda_1 \tau} = y_1, \quad e^{-\lambda_2 \tau} = y_2,$$

ed otterremo quattro equazioni del tipo (I), dove le costanti dei secondi membri sono:

$$\alpha = y(t_1), \; \beta = y(t_1 + \tau), \; \gamma = y(t_1 + 2\tau), \; \delta = y(t_1 + 3\tau).$$

Anche in questo caso perciò la risoluzione è facile.

Passiamo alle curve risultanti di tre componenti esponenziali. È facile in ogni caso impostare un sistema di sei equazioni con sei incognite del tipo (I), ma siccome questo sistema

non sarebbe facilmente risolubile io mi limiterò al caso in cui si conosca λ_3 e si vogliano dalle equazioni

$$y(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t}$$

ricavare A_1, A_2, A_3, λ_1, λ_2. Farò vedere come anche questo caso si riconduce al sistema (I).

Supponiamo anzitutto, come prima, che dai dati empirici si possano calcolare i momenti $\mu_0, \mu_1 .... \mu_4$.

Collo stesso procedimento già seguito troveremo un sistema analogo al (II) con 5 equazioni dal quale, colle posizioni

$$\frac{A_i}{\lambda_i} = x''_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

e $\mu_0 = a$, $\mu_1 = b$, $\frac{\mu_2}{2} = c$, $\frac{1}{6}\mu_3 = d$, $\frac{1}{24}\mu_4 = e$ giungiamo al sistema:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} x''_1 + x''_2 + x''_3 &= a \\ x''_1 y_1 + x''_2 y_2 + x''_3 y_3 &= b \\ x''_1 y^2_1 + x''_2 y^2_2 + x''_3 y^2_3 &= c \\ x''_1 y^3_1 + x''_2 y^3_2 + x''_3 y^3_3 &= d \\ x''_1 y^4_1 + x''_2 y^4_2 + x''_3 y^4_3 &= e \end{aligned}$$

con cinque sole incognite x''_1, x''_2, x''_3, y_1, y_2, perchè y_3 la supponiamo nota.

Moltiplichiamo ciascuna equazione per y_3 e togliamola dalla successiva, si ha

$$\begin{aligned} x''_1 + x''_2 + x''_3 &= a \\ x''_1(y_1 - y_3) + x''_2(y_2 - y_3) &= b - a y_3 \\ x''_1(y_1 - y_3)\, y_1 + x''_2(y_2 - y_3)\, y_2 &= c - b y_3 \\ x''_1(y_1 - y_3) y^2_1 + x''_2(y_2 - y_3) y^2_2 &= d - c y_3 \\ x''_1(y_1 - y_3) y^3_1 + x''_2(y_2 - y_3) y^3_2 &= e - d y_3 . \end{aligned}$$

La prima ci dà $x'_3 = a - x'_1 - x'_2$, dalle altre ponendo

$$x'_1(y_1 - y_3) = x_1 \,, \quad x'_2(y_2 - y_3) = x_2 \,,$$

si ha il sistema (I) dove

$$\alpha = b - ay_3 \,, \; \beta = c - by_3 \,, \; \gamma = d - cy_3 \,, \; \delta = e - dy_3 \,.$$

Il procedimento è perciò semplice: si calcolano con queste formule $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; colle formule date al principio si trovano x_1, x_2, y_1 e y_2. Le x'_1 e x'_2 si trovano poi colle

$$x'_1 = \frac{x_1}{y_1 - y_3} \quad \text{e} \quad x'_2 = \frac{x_2}{y_2 - y_3} \,.$$

Al sistema (III) si giunge anche se supponiamo di conoscere non tutta la curva $y\,(t)$, ma soli cinque valori ad intervalli di tempo costanti, sempre supponendo noto y_3.

Infatti si conosca $y\,(t)$ per $t = t_1 + i\tau$, per $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Avremo cinque equazioni

$$y(t_1 + i\tau) = A_1 e^{-\lambda_1(t_1+i\tau)} + A_2 e^{-\lambda_2(t_1+i\tau)} + A_3 e^{-\lambda_3(t_1+i\tau)} \quad (i = 0, 1 \ldots 4).$$

E ponendo

$$A_i \, e^{-\lambda_i t_1} = x'_i \qquad\qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$
$$e^{-\lambda_i \tau} = y_i \,,$$

$$y(t_1) = a \,, \; y(t_1 + \tau) = b \,, \; y(t_1 + 2\tau) = c \,, \; y(t_1 + 3\tau) = d \,, \; y(t_1 + 4\tau) = e \,,$$

avremo di nuovo il sistema (III).

In tutti questi casi non esiste perciò difficoltà nella determinazione dei parametri; solo osservo che quando si può scegliere fra i due metodi, dei momenti, o delle ordinate isolate, è sempre preferibile il primo, perchè tiene conto di tutti i dati. Per applicare il secondo metodo è conveniente di perequare prima le cifre empiriche per diminuire gli errori accidentali ed anche per questa ragione è sempre desiderabile che osservazioni di questa natura siano fatte ad intervalli di tempo costanti.

INTORNO AD UN FENOMENO DI POLARITÀ DI SCARICA.

Nota di D. PACINI [1]).

Nel 1904 col titolo « Sur la genèse de la radioactivité temporaire » [2]) compariva nei *Comptes Rendus* una nota dei signori Ed. Sarasin, Th. Tommasina ed F. J. Micheli, nella quale si faceva noto fra l'altro il seguente fatto. Gli A. attivavano un filo metallico all'aria, lo avvolgevano quindi rapidamente in forma di spirale e lo racchiudevano nell'apparecchio di Elster e Geitel. Coassialmente alla spirale, ed isolato, vi era un cilindro metallico collegato metallicamente alla asticciola che porta la foglia del solito elettroscopio di Exner. È noto che dando una carica al cilindro interno, essa verrà in un certo tempo neutralizzata per l'azione ionizzante del filo attivato. Gli Autori dando una carica ora positiva, ed ora negativa alternativamente all'elettroscopio, possono costruire due curve di disattivazione corrispondentemente ai due segni della carica. Ebbene essi trovano che le due curve non si sovrappongono; la positiva essendo sempre più elevata della negativa, cioè a dire che, a parità di condizioni, era dispersa più rapidamente l'elettricità positiva.

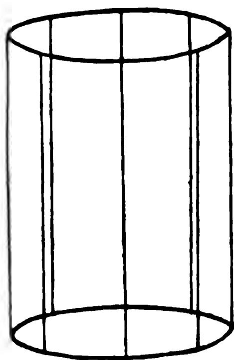
Gli Autori attribuiscono questo fenomeno alla carica portata direttamente dagli elettroni β, emessi dal filo attivato, sul cilindro interno elettrizzato.

Questa spiegazione pare dubbia per molte considerazioni e perciò ho intrapreso delle ricerche in proposito.

Attenendomi alla stessa disposizione sperimentale descritta dagli Autori sopracitati, avvolgevo sopra una griglia metallica, come quella rappresentata schematicamente in figura, del diametro interno di 64 mm. e dell'altezza di mm. 80, un filo di rame attivato all'aria (dopo averlo con gran cura pulito e stro-

1) Lavoro eseguito all' Ufficio Centrale di Meteorologia.
2) Comptes Rendus, 139, pag. 917, 1904.

finato con carta smerigliata). La spirale di filo attivato era introdotta nell'apparecchio di Elster e Geitel, e collegata metal-



licamente alle pareti in comunicazione col suolo. Coassialmente alla spirale, ed attaccato all'asticciola dell'elettroscopio, era disposto il cilindro interno di ottone ossidato avente il diametro di 32 mm. Caricando l'elettroscopio alternativamente a ± 250 Volta studiai le due curve di dispersione confermando il fenomeno indicato dagli Autori sopradetti.

L'esposizione del filo durava in generale intorno a 4 ore ciò che è sufficiente per accumulare sul filo stesso oltre quella tipo Radio, anche la radioattività indotta dal Torio, e quindi una disattivazione più lenta succedeva a quella dovuta ai prodotti di trasformazione del Radio; tuttavia per avere un'attività costante ed estendere nello stesso tempo le ricerche ricorsi al nitrato d'uranio. In luogo del filo attivato, avvolsi sulla guida metallica una carta piuttosto spessa, imbevuta d'una soluzione acquosa di nitrato d'uranio e lasciata prosciugare.

Sperimentando trovai subito che una polarità di scarica esisteva anche in questo caso, più netta che nel caso del filo, e che precisamente, come pel filo attivato all'aria, la elettricità positiva era dispersa più rapidamente della negativa. Constatai anche che il fenomeno di polarità diveniva più accentuato coll'aumentare della intensità del campo.

Dicendo *polarità* il valore σ del rapporto

$$\frac{t_n - t_p}{t_n} = \sigma$$

ove t_n è il tempo impiegato dalla fogliolina a percorrere un certo numero di divisioni del micrometro quando il cilindro interno è carico negativamente, e t_p il tempo impiegato a percorrere lo stesso numero di divisioni quando il cilindro è carico positivamente; trovai che questo rapporto aveva il valore di 0,03 per una differenza di potenziale fra i due cilindri di circa 250 Volta mentre aveva il valore di 0,04 per una differenza di potenziale di circa 800 Volta. Aumentai allora il diametro del cilindro interno portandolo fino a 48 mm. ed in questo caso con una differenza di potenziale di 250 Volta si ebbe $\sigma = 0,1$ e per 800 Volta risultò $\sigma = 0,2$. Finalmente aumentai fino a 55 mm. il diametro del cilindro interno, avvolsi sulla gabbia metallica una carta su cui aveva fatto cristallizzare il nitrato d'uranio da una soluzione acquosa, ed elevando la differenza di potenziale fra il cilindro interno e l'uranio a circa 1000 Volta ottenni per σ il valore $\sigma = 0,9$. E con questa nuova disposizione il fenomeno è sensibile anche quando la differenza di potenziale iniziale fra i due cilindri è di soli 190 Volta ottenendosi in questo caso per σ il valore di 0,06.

Questo fenomeno di polarità è visibile anche quando si pongano in presenza e sufficientemente vicini fra loro due dischi piani di cui l'uno metallico sia isolato, e messo insieme coll'elettrometro ad una certa differenza di potenziale rispetto all'altro costituito da una carta con sopra uno strato di cristallini di nitrato d'uranio.

I risultati precedenti conducevano a sospettare che la presenza del sale radioattivo non fosse essenziale e perciò passai a sperimentare con superficie ricoperte da cristallini di sostanze inattive.

Solfato di Sodio. — Sopra la sòlita guida avvolsi una carta su cui avevo fatto cristallizzare del solfato di sodio da soluzione acquosa; presi come cilindro interno quello per cui avevo ottenuto col nitrato d'uranio il massimo effetto, del diametro cioè di mm. 55, e per una differenza di potenziale fra i due cilindri di circa 1000 Volta constatai subito l'esistenza del fenomeno di polarità di scarica; invertito però rispetto a quello presentato dall'uranio, nel senso che *in questo caso*

era scaricata più rapidamente la elettricità negativa. Analogamente a quel che ho fatto per il nitrato d'uranio, per dare un'idea dell'intensità di questo effetto di polarità di scarica, così come io lo ho osservato nei varî sali, (avvertendo però che questi numeri non hanno che valore relativo dipendendo la intensità del fenomeno da una serie di condizioni non ancora definite) userò le seguenti notazioni. A seconda che si scarica più rapidamente la elettricità positiva o la negativa indicherò con σ_p e σ_n rispettivamente il valore dei rapporti $\frac{t_n - t_p}{t_n}$ e $\frac{t_p - t_n}{t_p}$ essendo t_n e t_p i tempi impiegati dalla fogliolina dell'elettrometro per percorrere sempre lo stesso numero di divisioni della scala del micrometro. Le misure furono sempre incominciate con una differenza di potenziale di circa 1000 Volta fra i due cilindri concentrici, ed estese anche a potenziali più bassi fino a circa 300 Volta, a seconda la intensità del fenomeno, come vedremo.

Per il solfato di sodio si ebbe

$$\sigma_n = 0{,}6$$

per una differenza di potenziale fra i due cilindri di circa 1000 Volta. Gli stessi cristalli di solfato di sodio presentavano il medesimo effetto dopo oltre un mese dacchè erano stati preparati.

Bisolfato di Chinina. — Una soluzione concentrata in alcool dà sulla carta uno strato di cristallini sottilissimi disposti a gruppetti; questi scaricano con maggior rapidità l'elettricità positiva, talchè si ha

a 1000 Volta $\sigma_p = 0{,}8$
800 » $\sigma_p = 0{,}3$
500 » $\sigma_p = 0{,}03$.

Dopo qualche giorno la polarità di scarica è scomparsa; però lasciati questi cristallini per 24h sotto una campana in presenza di vapor d'acqua acquistano la proprietà di scaricare più rapidamente la elettricità negativa, contrariamente alla precedente esperienza:

a 1000 Volta $\sigma_n = 0,9$

500 » $\sigma_n = 0,2$.

Da una soluzione acquosa di bisolfato di chinina concentrata a caldo ottenni sulla carta un deposito di cristallini, come piccoli parallelepipedi allungati; che essendo ben secchi, non presentano polarità sensibile, ma lasciati in presenza di vapor d'acqua, dànno il fenomeno in modo assai distinto.

$$\sigma_n = 0,7.$$

(Per far anche qualche esempio della rapidità della scarica dirò che in questo caso $\sigma_n = \frac{5', 30'' - 1', 35''}{5', 30''}$ valori medi di t_p e t_n per una escursione della fogliolina di 5 divisioni del micrometro pari a $^1/_2$ mm).

Si estraggono i cristalli dall'apparecchio e si lasciano sulla guida metallica; dopo qualche ora si torna a metterli in posto e si ripete la misura trovandosi per σ_n il valore 0,3. E successivamente avendo lasciato detti cristalli fuori dell'apparecchio, dopo 24^h la polarità era notevolmente diminuita.

Solfato di Magnesio. — Fu sciolto in acqua e dette sulla carta un deposito di cristalli a forma di prismetti allungati. Non erano ancora perfettamente asciutti quando vennero avvolti sulla griglia e introdotti nell'apparecchio. Ebbene per una differenza di potenziale di 500 Volta fra i cristalli e il cilindro interno apparve molto accentuato il fenomeno di polarità negativa col valore

$$\sigma_n = 0,9.$$

Solfato d'Ammonio. — Anche questo sale fatto cristallizzare da una soluzione acquosa presenta polarità di scarica nello stesso senso del precedente, dando per σ_n il valore

a 1000 Volta $\sigma_n = 0,8$

500 » $\sigma_n = 0,6$.

Questi cristalli presentavano il fenomeno colla medesima intensità ancora dopo oltre un mese dacchè erano stati ottenuti.

Solfato di Nichel. — Cristallizzò in prismetti aghiformi; quando è secco non dà polarità. Ma lasciato in un ambiente saturo di umidità presenta in sèguito polarità negativa

$$\sigma_n = 0,7 .$$

Lasciato a sè per 24^h sulla griglia, ma fuori dell'apparecchio, il giorno seguente presentava ancora debolmente il fenomeno, ma invertito, scaricando cioè di più l'elettricità positiva

$$\sigma_p = 0,1 .$$

Anche questo sale può dunque presentare, come il bisolfato di chinina, le due polarità.

Bicromato di Potassio. — Ottenuto da una soluzione acquosa in cristallini minuti, fu sperimentato dopo 4 giorni e non presentò polarità visibile. Esposto all'aria umida, presenta poi polarità molto spiccata, scaricando più rapidamente la elettricità negativa. Il fenomeno è visibile anche per una differenza di potenziale di soli 300 Volta fra il sale e il cilindro

per 1000 Volta $\sigma_n = 0,9$
500 » $\sigma_n = 0,8$
300 » $\sigma_n = 0,3$.

La polarità va diminuendo col tempo, tanto che il giorno seguente il fenomeno non è più visibile a basso potenziale.

Allume di Potassio. — Una soluzione in acqua concentrata a caldo lascia sulla carta un deposito copioso di cristallini regolarmente distribuiti in tanti gruppetti. Questi portati nell'apparecchio, sebbene siano ben secchi, presentano in modo distinto la polarità negativa:

$$\sigma_n = 0,7 .$$

In seguito, con una soluzione meno concentrata e con cristallizzazione lenta, ottenni sulla carta tutta una serie di cristallini perfetti ottaedrici di allume, distinti gli uni, dagli

altri. Questi cristalli presentano anch'essi il fenomeno, ma la polarità è invertita, scaricandosi ora con maggior rapidità la elettricità positiva.

Per una differenza di potenziale di 1000 Volta fra i due cilindri, 24h dopo ottenuto il deposito cristallino si ha

$$\sigma_p = 0,9 .$$

Senza nulla toccare si lasciano entro l'apparecchio e, dopo 8 giorni, si trova che la polarità è notevolmente diminuita

$$\sigma_p = 0,2 .$$

La carta su cui era cristallizzato il nitrato d'uranio che presentò la polarità invariabile per tutto il tempo che durarono le suddette esperienze, fu poi messa sotto una campana contenente una vaschetta con acido solforico. Dopo qualche giorno il sale disidratandosi perdeva la forma cristallina assumendo aspetto di massa polverosa. Riavvolta ora la carta sulla griglia constatai che la polarità, dapprima così accentuata, era quasi scomparsa, sebbene spingessi la differenza di potenziale fra i due cilindri oltre i 1000 Volta. Ho tolto allora la griglia con l'uranio dall'apparecchio e l'ho lasciata all'aria della stanza per 24 ore. Ciò è bastato perchè tornando a rimettere la griglia dentro l'apparato, la polarità di scarica tornasse distinta, sebbene con intensità inferiore alla primitiva essendo ora

$$\sigma_p = 0,5.$$

Dalle precedenti esperienze mi pare si possa dedurre che lo stato della superficie disperdente può generare una polarità di scarica molto sensibile anche a potenziali così bassi da non poter ancora pensare ad effluvii. Se il fenomeno dipenda anche da eventuali azioni chimiche, o da alterazioni fisiche nell'aria potranno solo decidere ulteriori esperienze.

Mi è lieto infine ringraziare il Prof. A. Sella per i suggerimenti durante queste ricerche, ed il Prof. L. Palazzo per i mezzi cortesemente fornitimi.

SULLA DISPERSIONE DELL'ELETTRICITÀ IN VARII GAS A TEMPERATURA ELEVATA.

Nota del Dott. ADOLFO CAMPETTI [1]).

1. — In una nota pubblicata negli *Atti della R. Accademia delle Scienze* (novembre 1904) ho riferito alcune esperienze relative alla dispersione elettrica nei vapori di jodio da lamine di platino a varie temperature; tuttavia le esperienze allora eseguite lasciavano luogo a qualche incertezza (incertezze tali tuttavia da non alterare il significato dei resultati ottenuti), per causa specialmente del metodo di riscaldamento (stufa a gas) e del fatto che coi vapori di jodio era necessario operare in recipiente aperto ed era quindi difficile evitare che ai vapori di jodio restasse mescolata anche una certa quantità di aria (più o meno umida).

Nelle esperienze cui si riferisce la presente nota e che riguardano la dispersione dell' elettricità da lamine di diversi metalli (platino, argento, rame) a varie temperature e in diversi gas (aria, cloro, ammoniaca) allo scopo di avere un riscaldamento più costante e che non portasse perturbazioni nell'ambiente tali da influire sui fenomeni di dispersione (come può essere il caso con una stufa a gas), si adoperò sempre una stufa elettrica e perciò l'esperienza veniva disposta così.

Un tubo del così detto *resistenzglas* di Jena, lungo circa 50 centimetri e del diametro di 3 centimetri disposto orizzontalmente, era circondato nella sua parte di mezzo (e per la lunghezza di circa 10 centimetri) da un cilindro di ottone, sul quale erano avvolte (ed isolate con amianto) varie spire di filo di ferro, alla loro volta ricoperte da varii strati di cartone di amianto, allo scopo di diminuire la dispersione di calore verso l'esterno. Inviando nelle spire una corrente (la cui intensità poteva essere regolata e misurata mediante un reostato ed un amperometro inseriti nel circuito) si otteneva nella parte cen-

1) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 42.

trale del tubo l'innalzamento voluto di temperatura: e questa temperatura poteva mantenersi così costante che, durante l'esperienza, essa non variava che di uno o due gradi.

Le due estremità del tubo (che, qualunque fosse la temperatura della parte centrale, restavano sempre alla temperatura dell'ambiente) erano chiuse da due tappi di paraffina. Attraverso a questi tappi passavano il tubo di vetro sottile contenente una delle saldature della coppia platino-platino iridiato (prima tarata), destinata alla misura della temperatura, i tubetti di sostegno degli elettrodi (attraversati dal filo di platino necessario per le comunicazioni elettriche coll'esterno) e finalmente i tubi per riempire l'apparecchio col gas sul quale si voleva sperimentare.

Uno dei due elettrodi (superficie due centimetri quadrati) era costantemente in comunicazione col suolo, l'altro (superficie un centimetro quadrato) era in comunicazione con un elettroscopio di Exner graduato in Volt: la carica si dava mediante una pila secca. Quest' ultimo elettrodo doveva essere isolato con gran cura; perciò il tubetto di sostegno era fissato entro un corto cilindretto di zolfo puro, il quale attraversava il tappo di paraffina: la parte di questo cilindro sporgente verso l'interno del tubo era generalmente ricoperta da un velo di paraffina, affine di preservare lo zolfo dall'azione chimica dei gas (specialmente del cloro) che potevano essere introdotti nel tubo. Con questa disposizione l'isolamento (purchè rinnovato di frequente) si mantiene in tutti casi assai buono, anche nel caso più sfavorevole in cui il tubo sia ripieno di cloro.

I due elettrodi stavano uno di fronte all'altro nella parte centrale del tubo (quella cioè che può essere riscaldata) alla distanza di un centimetro.

2. — Poichè anche la dispersione nell'aria da elettrodi di platino dipende dalla superficie e posizione relativa di questi elettrodi, dalla distanza dell' elettrodo carico dalla superficie del tubo e dalla natura del tubo stesso, così in qualunque serie di esperienze è sempre necessario di premettere, per avere un termine di confronto, i dati relativi alla dispersione nel-

l'aria. L'aria nel tubo si introduceva secca, per quanto era possibile, col farle attraversare due boccie di lavaggio con acido solforico concentrato, e le pareti del tubo erano pure disseccate con prolungato riscaldamento e corrente di aria secca.

Adoperando elettrodi di platino e facendo crescere la temperatura sino a 400° la dispersione si manteneva, tanto per la elettricità positiva, quanto per la negativa, perfettamente costante: questa dispersione, *sempre molto piccola,* è quindi dovuta alla naturale ionizzazione dell'aria che circonda l'elettrodo carico, i fili di comunicazione e l'elettroscopio, e all'imperfetto isolamento dei vari sostegni; di questa debole dispersione si tenne sempre conto come di un termine di correzione da introdurre nei resultati di tutte le esperienze. Al disopra di quella temperatura la dispersione (com'era prevedibile) andava crescendo prima lentamente, poi più rapidamente: più rapidamente per la elettricità negativa che per la positiva; e la tabella seguente serve a dare un'idea della sua grandezza a due temperature differenti: in questa e nelle seguenti tabelle T indica la temperatura del gas e degli elettrodi, *t* il tempo (in minuti primi) decorso dal principio dell'esperienza, V il potenziale dell'elettrodo carico.

	Elettricità positiva V		Elettricità negativa V	
t	T = 547°	T = 595°	T = 550°	T = 600°
0'	142	142	142,5	142
1	141	137,5	139,5	113
2	140	133,5	137	97
3	139	130,5	133	82
4	138	127	130	71
5	137	124,5	126,5	67
6	135,5	122	122,5	63
7	134	119,5	119	61
8	133	117	117	—
9	132	115	114,5	—
10	131	113	113	—

Da questa tabella appare subito, come era prevedibile, che per le dispersioni più forti (colonna 2ª, 3ª e 4ª), in cui, data la grande ionizzazione del gas, non si raggiunge, colle differenze di potenziale adoperate, la corrente di saturazione, la quantità di elettricità trasportata da un elettrodo all' altro cresce col crescere della differenza di potenziale; perciò la dispersione è più rapida per i potenziali più elevati: contrariamente a quello che succede per le dispersioni più deboli (colonna 1ª), ove, essendo raggiunta in ogni caso la corrente di saturazione, la intensità della corrente che si stabilisce tra i due elettrodi e perciò la dispersione è pressochè indipendente dal potenziale dell' elettrodo.

3. — Per quanto riguarda la dispersione del cloro da elettrodi di platino devesi notare anzitutto che le esperienze le quali hanno dato risultati concordanti sono quelle nelle quali il cloro si poteva ritenere puro (sviluppandolo per l' azione dell' acido cloridrico puro sul permanganato potassico), privo di aria e ben secco. A tale scopo il cloro svolto nel modo anzidetto attraversava tre bottiglie di lavaggio, di cui la prima conteneva una soluzione di solfato di rame, le altre due acido solforico concentrato.

Osserviamo subito che l' influenza dell'umidità sembra essere quella di diminuire la dispersione; conviene notare tuttavia che, per le condizioni dell'esperienza, l'umidità relativa nella regione riscaldata del tubo non può essere che molto piccola: infatti, mentre ivi la temperatura è molto elevata, la tensione del vapor d'acqua (per il principio delle pareti fredde) non può essere superiore alla tensione massima corrispondente alla temperatura degli estremi del tubo, i quali hanno la temperatura dell'ambiente; nè d'altra parte è possibile riscaldare tutto il tubo, se si vuole avere un buon isolamento.

Anche nella dispersione in cloro secco si ha una complicazione per il fatto che tra il gas e l'elettrodo ha luogo una sensibile azione chimica; per questa azione la superficie degli elettrodi resta alterata e in conseguenza sulla grandezza della dispersione ha qualche influenza il tempo decorso dall' istante in cui il gas è stato introdotto nel tubo: si poterono tuttavia

ottenere risultati ben concordanti, eseguendo l'esperienza pochi minuti dopo che il cloro era stato introdotto nel tubo: l'elettroscopio congiunto permanentemente con uno dei due elettrodi ci dava la sicurezza che il cloro non trasportava con sè alcuna carica, nè positiva, nè negativa. La tabella che ségue contiene le medie di due serie di esperienze eseguite a qualche distanza di tempo: come, si vede, i resultati delle due serie sono in buono accordo; tanto più che si deve tener conto del fatto che la distanza fra i due elettrodi non è che approssimativamente la stessa nelle due serie di esperienze. Come temperatura si scelse quella di 420° circa: al disotto di questa temperatura la dispersione diminuisce rapidamente, al disopra aumenta tanto che, specialmente per l'elettricità negativa, non si può seguire con precisione il movimento delle foglie dell'elettroscopio.

	I		II	
	V	V	V	V
t	Elettricità positiva T = 420°	Elettricità negativa T = 422°	Elettricità positiva T = 418°	Elettricità negativa T = 424°
0'	142	142	142	142
1	134	131	134	128,5
2	127	120	126,5	114,5
3	120	110	119	105
4	113,5	104	112,5	97,5
5	109	97,5	105,5	90
6	105	92	99,5	85
7	101	87	94,5	80,5
8	98,5	81,5	90,5	77,5
9	95	77,5	87	74,5
10	92	74,5	85	71,5

Dai risultati riferiti appare subito che la dispersione nel cloro è enormemente superiore a quella nell'aria; basta per ciò ricordare che, alla temperatura di 420°, la dispersione nell'aria è estremamente piccola (colle dimensioni degli elettrodi usati).

Anche in questo caso la elettricità positiva si disperde meno rapidamente della negativa; ma la differenza di comportamento delle due elettricità è già meno sensibile che per l'aria.

Questo può dipendere da varie ragioni, poichè il fenomeno della dispersione nel cloro è assai più complicato che nell'aria: infatti nel caso del cloro, la ionizzazione del gas è probabilmente dovuta a due cause: l'elevazione di temperatura o piuttosto il suo contatto con le pareti calde, e l'azione chimica tra il gas e gli elettrodi.

Può darsi (e questo succede effettivamente in altri casi di cui parleremo in seguito) che per l'azione chimica si producano piuttosto ioni positivi che negativi alla superficie dell'elettrodo: e questo può far aumentare la rapidità di dispersione dell'elettricità positiva di fronte alla negativa. L'andamento della dispersione dimostra che qui, in nessuno dei casi, è stata raggiunta tra i due elettrodi la corrente di saturazione.

4. — Siccome scopo principale di questo lavoro è di esaminare la dispersione in relazione coll'azione chimica che ha luogo tra il gas e gli elettrodi, eseguisco altre esperienze sostituendo all'elettrodo di platino in comunicazione coll'elettroscopio un elettrodo di argento della stessa forma e dimensione: l'elettrodo in comunicazione col suolo è ancora di platino.

	V	V
t	Elettricità positiva $T = 366°$	Elettricità negativa $T = 365°$
0'	142	142
1	134	137,5
2	126,5	133
3	120	129
4	113,5	124,5
5	106,5	119,5
6	100	116
7	95,5	113,5
8	91	112
9	88	111
10	85,5	109,5

Facendo le esperienze nell' aria l' elettrodo di argento si comporta quasi esattamente come quello di platino; le esperienze nel cloro hanno un significato soltanto relativo, poichè la lamina di argento rimane presto ricoperta da uno strato corneo di cloruro di argento: tuttavia, già alla temperatura di circa 320°, la dispersione si rende manifesta, più per l'elettricità positiva che per la negativa: questo comportamento si mantiene anche a temperature superiori. Per stabilire il confronto scelgo le esperienze eseguite a 365° circa, alla qual temperatura la differenza suaccennata si manifesta molto chiaramente (V. tab. pag. 194).

5. — Assai più interessanti, sempre per quanto riguarda la relazione tra la dispersione e l'azione chimica del gas sull'elettrodo, sono le esperienze eseguite adoperando una lamina di rame in luogo di una lamina di platino.

In tal caso sino alla temperatura di 240° la dispersione è nulla tanto per la elettricità positiva che per la negativa; al disopra di questa temperatura la lamina di rame si comporta per una carica negativa come una lamina di platino: invece la dispersione per la elettricità positiva aumenta così rapidamente, che alla temperatura di circa 270° l' elettroscopio si scarica completamente in pochi minuti: estraendo però la lamina di rame, dopo averla portata a questa temperatura, la si trova ricoperta di uno strato uniforme di ossido.

L'esperienza può anche essere disposta diversamente: si può cioè adoperare una lamina di platino come elettrodo carico e rivestire con una lamina di rame l'elettrodo posto a terra: in tal caso deve aspettarsi (e questo è effettivamente confermato dall'esperienza) che la dispersione sia nulla per la elettricità positiva e molto forte invece per la negativa. L'aumento rapido di dispersione dell'elettricità positiva nel primo caso e negativo in quest'ultimo tra le temperature di 240° e 270° appare molto chiaramente dalla tabella che segue: non deve far meraviglia che i numeri della 2ª e 4ª colonna siano differenti, perchè diverse sono pure le condizioni dell'esperienza.

Infatti nel primo caso la lamina di rame carica (che disperde l'elettricità positiva) emette ioni positivi da tutta la sua

superficie, mentre nel secondo caso la lamina di platino (carica negativamente) riceve ioni positivi dalla lamina di rame che le sta di fronte, quasi esclusivamente sopra una faccia.

	Elettrodo di rame carico positivamente		Elettrodo di platino carico negativamente	
	V	V	V	V
t	T = 242°	T = 278°	T = 241°	T = 274°
0'	142	142	142	142
1	142	104	142	114
2	142	72	142	95,5
3	142	57,5	141,5	79
4	141,5	49,0	141,5	70
5	141,5	42,5	141,5	62
6	141,5	—	141	55
7	141,5	—	141	—
8	141	—	141	—
9	141	—	141	—
10	141	—	141	—

Le esperienze sopra riportate dimostrano dunque che, a temperatura relativamente bassa, una lamina di rame emette in grande quantità ioni positivi: siccome però a tale temperatura il rame si ossida, si possono fare sulla causa dell'ionizzazione due ipotesi: essa può dipendere dal processo di ossidazione (ionizzazione per azione chimica), oppure può essere legata collo stato della superficie dopo l'ossidazione.

È facile però dimostrare essere giusta la prima ipotesi, eseguendo esperienze di dispersione con lamina di platino ricoperta da uno strato di ossido nero od ossido rosso di rame. In ambedue i casi l'andamento della dispersione è molto diverso da quello che si ha operando con lamine di rame.

Infatti coll'ossido nero di rame (CuO) la dispersione presenta gli stessi caratteri che con una lamina di platino: soltanto essa è molto più forte, perchè già alla temperatura di circa 430°, a cui la lamina di platino nell'aria non presenta che una perdita appena sensibile della sua carica, il potenziale

dell' elettrodo scende già rapidamente come appare dai dati della tavola seguente:

	V	V
t	Elettricità positiva T = 482°	Elettricità negativa T = 434°
0'	142	142
1	140,5	135
2	138,5	127
3	137	122
4	135	116
5	133,5	110,5
6	131,5	104,5
7	130	100,5
8	128,5	95,5
9	127,5	92
10	125,5	89

Coll' ossido rosso (Cu_2O) invece il comportamento è assai più complicato: anche qui interviene, alle temperature della esperienza, l'azione chimica, poichè l'ossido rosso si trasforma in ossido nero: ad ogni modo però la dispersione per l' elettricità positiva è sempre minore che per la negativa; e la dispersione dell'elettricità negativa, fortissima da principio, va, a temperatura costante, diminuendo col tempo, mano a mano che procede la trasformazione del Cu_2O in CuO.

La cosa riuscirà più chiara riportando dei dati numerici: nelle tabelle qui sotto è data la dispersione per l' elettricità positiva, alla temperatura di circa 415°: e notiamo subito che nell' apparecchio usato la dispersione si rende solo sensibile sopra i 370°.

T = 414°

t	0'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	142	136,5	131,5	126,5	120,5	116	111	107	105	103	100,5

Invece la dispersione per l'elettricità negativa è già fortissima appena raggiunta la temperatura di 370° e decresce rapidamente col tempo, come lo mostrano le esperienze I e II qui sotto riportate, eseguite a distanza di 20' l'una dall'altra.

	I	II
	V	V
t	T = 375°	T = 375°
0'	142	142
1	87	137
2	54	131,5
3	—	127,5
4	—	124,5
5	—	121,5

Come conclusione delle esperienze eseguite con lamine di rame o di platino ricoperte di ossidi di rame possiamo dire *che il rame a una temperatura di circa 260° emette per la ossidazione grandi quantità di ioni positivi, l'ossido rosso di rame nella sua trasformazione in ossido nero* (CuO) *(alla temperatura di circa 360°) emette invece ioni negativi.*

6. — Per quanto riguarda la dispersione nel cloro da lamina di rame conviene fare la seguente osservazione. Anzitutto l'esperienza può essere eseguita in due modi diversi; si può cioè introdurre il cloro nel tubo a bassa temperatura e quindi riscaldare, ovvero portare prima alla temperatura voluta (tenendo il rame nell'aria) e quindi introdurre il cloro; in questo secondo caso però il cloro non agisce più sopra rame metallico, ma su rame ossidato.

In qualunque dei due modi si operi il risultato che si ottiene è sempre questo, che per temperature inferiori a 300° la dispersione è nulla per le due elettricità (per quanto abbia luogo un'azione chimica assai lenta del cloro sulla lamina): ad una temperatura di poco superiore a 300° e compresa ad ogni

modo tra 300° e 310° la reazione avviene in modo assai rapido e l'elettroscopio si scarica del tutto quasi istantaneamente.

Per conseguenza le esperienze con lamine di rame o ricoperte di ossidi di rame nel cloro danno resultati poco interessanti.

7. — Esperienze analoghe a quelle riferite prima per la dispersione nell' aria e nel cloro furono pure eseguite riempiendo il tubo con gas ammoniaco puro e secco. Il gas era preparato per l'azione di una soluzione ammoniacale (in acqua disareata) assai concentrata sopra la soda caustica: l' essiccamento del gas era operato con varii tubi a cloruro di calcio.

Adoperando come elettrodo una lamina di platino la dispersione è del tutto trascurabile sino alla temperatura di circa 420°: al disopra di questa temperatura cresce lentamente, più lentamente per l'elettricità positiva che per la negativa, come appare dai resultati della tabella che segue.

	Elettricità positiva		Elettricità negativa		
	V	V	V	V	V
t	T = 488°	T = 513°	T = 467°	T = 486°	T = 514°
0'	142	142	142	142	142
1	140	135	139,5	136,5	115
2	139	129	137,5	131	102,5
3	137,5	124,5	135	126	89,5
4	136,5	120,5	133	121	77
5	135	117	131,5	117	68
6	134	114	129,5	113	60,5
7	133	111	128	109	55
8	131,5	108	125,5	105,5	50
9	131	106,5	124	103,5	—
10	130	104	122	100,5	—

La dispersione presenta dunque gli stessi caratteri che nell'aria, solo è, a parità di temperatura, assai più forte.

8. — Eseguisco ora esperienze analoghe a quelle precedenti con l'aria e il cloro, adoperando cioè come elettrodo carico

una lamina di rame, oppure una lamina di platino ricoperta di CuO o di Cu_2O. Per il caso di un elettrodo di rame si hanno i resultati seguenti:

	Elettricità positiva		Elettricità negativa		
	V	V	V	V	V
t	T = 455°	T = 485°	T = 426°	T = 447°	T = 483°
0′	142	142	142	142	142
1	138	133	140	137,5	111
2	135	125,5	139,5	134	92,5
3	132	118	138	130	77
4	130	110	136,5	127,5	67
5	128	102,5	134,5	124	58,5
6	127,5	96	133	120	51,5
7	125	90,5	131	116,5	—
8	124,5	86	129,5	113	—
9	122,5	83	127,5	109,5	—
10	121,5	79,5	126,5	106	—

Anche in questo caso la dispersione ha comportamento analogo a quello dell'esperienza precedente: aumenta solo (a parità di temperatura) la sua rapidità, per quanto non abbia apparentemente luogo alcuna azione chimica tra il gas e la lamina: questa infatti dopo l' esperienza non presenta alcun segno di alterazione superficiale.

Credo inutile riportare per disteso le esperienze relative alla dispersione da lamina di platino ricoperta di CuO o Cu_2O. Nel primo caso la dispersione è *maggiore per l'elettricità positiva che per la negativa:* infatti alle temperature rispettivamente di 440° e 470°, mentre per una carica positiva il potenziale dell'elettrodo discende in dieci minuti da 142 a 123 e 57 Volt rispettivamente, per la carica negativa alle stesse temperature la diminuzione è solo da 142 a 135 e a 103.

Nel secondo caso (lamina ricoperta di Cu_2O) il fenomeno si complica come per la dispersione nell' aria: la dispersione è maggiore per l'elettricità negativa che per la positiva, ma la dispersione di una carica negativa non si mantiene co-

stante a una stessa temperatura, ma diminuisce notevolmente col tempo.

9. — Dalle numerose esperienze sopra riportate appare in modo non dubbio che (almeno nella maggior parte dei casi) *l'azione chimica tra il gas e l'elettrodo produce una forte ionizzazione del gas: in alcuni casi l'elettrodo emette ioni positivi, in altri negativi.*

Delle varie esperienze la più convincente e facile a seguire con precisione è quella con lamine di rame: infatti nell'esperienza con gli ossidi di rame, data la costituzione porosa della sostanza, se ha luogo un'azione chimica, essa avviene così rapidamente che non si può dire qual'è effettivamente in ogni istante la natura dell'elettrodo: invece nell'ossidazione, ad es., del rame dell'aria il processo avviene lentamente e per molto tempo in modo pressochè uniforme.

Per quanto riguarda la dispersione dell'elettricità positiva dal rame e dai suoi ossidi, le mie esperienze sono in aperta contraddizione con quelle di R. J. Strutt [1]): nè io so spiegare questa divergenza se non pensando alle condizioni d'esperienza assai diverse e poco convenienti dell'autore citato. Infatti egli esaminava la dispersione dell'elettricità positiva da un filo metallico carico situato entro un recipiente di vetro internamente argentato: è quindi evidente che in tal caso la ionizzazione alla superficie dell'argento (che si può dire infinitamente grande rispetto a quella del filo) nasconde ogni altro processo di ionizzazione alla superficie del corpo esaminato, ora in parte, ora completamente.

E perciò, contrariamente allo Strutt, dovremo concludere che esistono processi chimici che dànno luogo a produzioni di ioni positivi sul corpo soggetto alla reazione: e questo per il rame a una temperatura relativamente assai bassa, cioè al disotto di 270°. Invece nel gas ammoniaco, ove l'ossidazione non può aver luogo, a quella temperatura la dispersione è assolutamente trascurabile.

1) R. J. Strutt, Philosophical Magazine, 2, 1902.

È quasi superfluo il ricordare che la ionizzazione che ha luogo alla superficie del rame nel processo di ossidazione verso i 270° presenta grande analogia coll' ionizzazione dell'aria in presenza di fosforo, che già si ossida spontaneamente alla temperatura ordinaria.

Per gli ioni prodotti nell'ossidazione del fosforo e per quelli prodotti preparando alcuni gas per via chimica il Bloch [1]) ha trovato una mobilità molto piccola e conseguentemente pure un valore molto piccolo del coefficiente di ricombinazione; sarebbe interessante di determinare i valori corrispondenti per gli ioni positivi prodotti nell'ossidazione del rame: ma poichè la disposizione sperimentale richiede per questo altri mezzi oltre quelli qui adoperati, mi riserbo di eseguire in altro tempo tali determinazioni.

Torino, Istituto Fisico dell' Università, ottobre 1906.

ALCUNE CONSIDERAZIONI INTORNO ALLA TEORIA DELLA TENSIONE DI SOLUZIONE DEI VALORI DI DECOMPOSIZIONE.

Nota del Dott. UGO GRASSI.

Per mezzo di considerazioni puramente termodinamiche si può dimostrare che quando il passaggio di 96540 Coulombes dalla soluzione all'elettrodo è accompagnato in modo invertibile dal depositarsi sull'elettrodo di un ione equivalente allo stato neutro, la differenza di potenziale tra la soluzione e l'elettrodo stesso è data da:

$$(1) \qquad , \quad \phi_s - \phi_e = \frac{RT}{\nu\varepsilon} \lg \frac{P}{p}$$

essendo ν la valenza dell'ione stesso, p la pressione osmotica dell' ione nella soluzione considerata, T la temperatura assoluta, $R = 821 \times 101325$, $\varepsilon = 9654$ e le ϕ essendo misurate in unità elettromagnetiche C.G.S. Alla costante P che nella deduzione termodinamica appare semplicemente come una co-

1) Bloch, Journal de Physique, Tomo 3, 1904.

stante di integrazione Nernst che per il primo stabilì la formula (1) dette il nome di tensione di soluzione.

Essa assume il significato concreto quando si deduca la formula stessa scrivendo che gli ioni soggetti contemporaneamente alla spinta dovuta alla caduta della pressione da P a p ed a quella in verso opposto dovuta al campo elettrico sono in equilibrio.

La interpretazione della costante P come tensione di soluzione sollevò le obbiezioni di Lehefeldt [1]) il quale venne alla conclusione, evidentemente smentita dai fatti, che per ogni centimetro quadrato di superficie di un elettrodo di zinco debbano penetrare in soluzione grammi 1,27 di zinco prima che sia stabilito l'equilibrio elettrico tra l'elettrodo e la soluzione in cui va immerso.

Il calcolo era da Lehefeldt eseguito alla seguente maniera: Le due cariche uguali ed opposte distribuite superficialmente in due strati di densità σ infinitamente vicini si attirano con una forza data da:

$$\frac{2\pi\sigma^2}{D}$$

essendo D la costante dielettrica del mezzo solvente. Questa forza deve secondo Lehefeldt fare equilibrio alla differenza tra la tensione di soluzione del metallo e la pressione osmotica della soluzione, e poichè nel caso dello zinco $P = 10^{18} \frac{\text{Dine}}{\text{cent}^2}$ e quindi p è trascurabile rispetto ad essa, $D = 80$ (per l' acqua) ne risulta $\sigma = 377.10^4$ Coulombs; ossia, poichè ogni equivalente ha una carica di 96540 Coulombs, ogni centimetro quadrato deve contenere 0,039 equivalenti di zinco ovvero grammi 1.27 circa.

Krüger [2]) addusse alcune ragioni plausibili per dimostrare come il Lehefeldt era partito da premesse sbagliate. E senza preoccuparsi della forma precisa di distribuzione degli ioni eseguiva il calcolo alla seguente maniera:

1) Z. für phys. Chem., 32°, pag. 360.
2) Z. für phys. Chem., 35°, pag. 18.

Indicando con C la capacità dell'elettrodo per ogni centimetro quadrato, con σ la sua densità e con E la differenza di potenziale che si ha tra esso e la soluzione, deve notoriamente verificarsi la relazione

$$\frac{\sigma}{C} = E .$$

Ora la C è data da misure della capacità di polarizzazione ed è posta da Krüger in via approssimata uguale a 20 microfaraday. Ammesso ciò ponendo come effettivamente si osserva $E = 0,5$ Volt si ha una densità di 10^{-5} Coulombs, la quale corrisponde a 3.10^{-9} grammi di zinco per ogni centimetro quadrato.

2) Ci proponiamo ora di dimostrare (più che altro a scopo didattico) come se invece di ammettere come faceva Lehefeldt che la elettricità si distribuisca in forma di doppio strato, ammettiamo una distribuzione di elettricità in forma di semplice strato sulla faccia dell'elettrodo e corporea nella regione della soluzione ad esso contigua si può facilmente arrivare a conclusioni relative alla quantità di zinco entrato in soluzione che non sono tanto in contraddizione con i fatti osservati come quelle cui era giunto Lehefeldt. In altre parole si può ammettere che il passaggio dalla pressione di soluzione P a quella osmotica p si avveri in uno strato così sottile che, una quantità di ioni piccola a piacere serva con il campo elettrico originato con le cariche a equilibrare la spinta dovuta alla differenza della pressione di soluzione a quella osmotica. Naturalmente i risultati che si otterranno avranno un valore approssimato anche per la circostanza che la legge di Avogadro che servirà di base agli sviluppi successivi ha solo la validità di una legge approssimata.

Come fu stabilito da Nernst e da Planck quando gli ioni di valenza ν si muovono in un liquido che oppone una certa viscosità al loro movimento la componente della velocità di ciascun ione sull'asse delle x è data da:

$$(a) \qquad u\left(\frac{-RT}{\nu}\frac{\partial \lg p}{\partial x} \mp \varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$$

essendo u una costante dipendente dalla natura dell' ione, $R, T, \varepsilon, p, \Phi$ conservando il significato loro precedentemente attribuito.

Nel caso dell' equilibrio questa espressione deve essere nulla. Consideriamo per semplicità un elettrodo positivo immerso in acqua pura o in una soluzione così povera di ioni che si possa ammettere che la differenza di potenziale tra l'elettrodo e la soluzione si stabilisca esclusivamente per l'entrare nella soluzione del metallo allo stato di ione, il quale lasci perciò sull'elettrodo una quantità equivalente di elettricità negativa distribuita in un semplice strato; ed inoltre (sempre per maggiore semplicità) supponiamo che la faccia dell' elettrodo sia piana ed indefinita cosicchè le diverse variabili siano funzioni esclusivamente della loro distanza x dalla faccia dell' elettrodo considerato; avremo in tali ipotesi la sola equazione

$$(b) \qquad \frac{RT}{\nu}\frac{\partial \lg p}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \,.$$

In tutti i punti interni alla soluzione la elettricità avrà una distribuzione corporea e la sua densità ρ sarà data dalla equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi g^2}{K}\rho$$

essendo g la velocità critica e K la costante dielettrica (81 per l' acqua).

D'altra parte si può esprimere la densità elettrica per mezzo della concentrazione degli ioni tenendo conto che per la legge di Avogadro quest'ultima è espressa in grammi equivalenti per ogni cm^3 da

$$\frac{\nu p}{RT} \,;$$

e poichè ogni ione porta con sè la carica ε si avrà

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\varepsilon\nu g^2 p}{K\,RT} \,;$$

derivando la (b) rispetto ad x e sostituendo a $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ il valore dato dalla (c) si ha:

$$\frac{\partial^2 \lg p}{\partial x^2} = p \frac{4\pi\varepsilon^2 g^2 \nu}{K R^2 T^2}.$$

Moltiplicando i due membri di quest'ultima per $2 \frac{\partial \lg p}{\partial x}$ ed integrando la equazione risultante rispetto ad x si ottiene

$$\left(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 = \frac{8\pi\varepsilon^2 g^2 \nu}{K(RT)^2} p + C .$$

Dalla quale separando le variabili e integrando con le note regole di calcolo si ha

$$x = \frac{1}{2\sqrt{C}} \lg \frac{\sqrt{\frac{8\pi\nu}{K}\left(\frac{\varepsilon g}{RT}\right)^2 p + C} - \sqrt{C}}{\sqrt{\frac{8\pi\nu}{K}\left(\frac{\varepsilon g}{RT}\right)^2 p + C} + \sqrt{C}} - M$$

essendo M e C costanti da determinarsi in maniera opportuna.

Da questa equazione passando dai logaritmi ai numeri, isolando il radicale e quadrando otteniamo:

$$\frac{8\pi\varepsilon^2 g^2 \nu}{K R^2 T^2} p + C = C \left(\frac{e^{2(x+M)\sqrt{C}} + 1}{e^{2(x+M)\sqrt{C}} - 1}\right)^2$$

donde:

$$p = \frac{K R^2 T^2}{8\pi\nu\varepsilon^2 g^2} C \frac{4e^{2(x+M)\sqrt{C}}}{\left(e^{2(x+M)\sqrt{C}} - 1\right)^2}.$$

Le costanti di integrazione C ed M sono a priori arbitrarie, ma all'atto pratico esse sono soggette ad alcune limitazioni. In primo luogo la C deve essere positiva altrimenti la p risulterebbe imaginaria; così pure la M deve essere positiva giacchè altrimenti la $x + M$ potrebbe annullarsi e la p corrispondente ne risulterebbe infinitamente grande.

Posto ciò per $x = 0$ si ha

$$P=\frac{K(RT)^2}{8\pi\nu\varepsilon^2 g^2}C\frac{4e^{2M\sqrt{C}}}{\left(e^{2M\sqrt{C}}-1\right)^2}\,.$$

Al crescere di x la p diminuisce con grande rapidità quando $\sqrt{C}$ è positivo ed aumenta invece pure con grande rapidità se $\sqrt{C}$ è negativo: l'un caso si avrà dunque quando l'elettrodo abbia una grande tensione di soluzione, l'altro quando invece essa sia assai piccola. È appunto la grande rapidità con cui l'esponenziale $e^{\sqrt{C}x}$ aumenta o diminuisce con il crescere di x che permette in ogni caso di soddisfare alla condizione di equilibrio con quantità minime di ioni.

3) Volendo farci un criterio della massa effettiva di metallo che passando allo stato di ione per ogni centimetro quadrato di elettrodo può essere sufficiente a equilibrare la tensione di soluzione dovremo integrare la $\frac{\nu p}{RT}$ rispetto ad x; ed il valore ottenuto limitato opportunamente darà la massa μ di ioni-equivalenti entrati in soluzione. La integrazione indefinita di una tale espressione dà:

$$(d)\qquad \frac{2KRTC}{8\pi\varepsilon^2 g^2}\frac{1}{e^{2(x+M)\sqrt{C}}-1}=\mu$$

che va appunto limitata tra $x=0$ ed $x=\infty$. È facile vedere che il valore di μ per $x=\infty$ è nullo; e perciò la massa di equivalenti di elettrodo entrata in soluzione è

$$\mu=\frac{2KRTC}{8\pi\varepsilon^2 g^2}\frac{1}{e^{M\sqrt{C}}-1}$$

donde

$$\mu^2=\frac{P}{8\pi\nu\varepsilon^2 g^2 e^{M\sqrt{C}}}\,.$$

Ora $\sqrt{C}$ è assai grande e se anche $M\sqrt{C}$ è sufficientemente grande il rapporto

$$\frac{\mu^2}{P}$$

potrà essere piccolo a piacere, ossia si potrà sempre scegliere le costanti di integrazione in modo che la massa di ioni entrati in solnzione sia piccola quanto ci piace.

Per ottenere appunto una massa di ioni quale è stata calcolata da Krüger basta porre

$$C = 10^{57} \qquad M = 3 10^{-28} \; ;$$

basta infatti ricordare che nel caso dello zinco

$$P = 1.8.10^{19}.10^{6} \qquad \nu = 2 \qquad \mu = \frac{3.10^{-9}}{32,7}$$

e

$$R = 8.2.10^{7} \qquad T = 2.9.10^{2}$$

$$\varepsilon = 9.6.10^{3} \qquad g = 3.10^{10}$$

$$K = 81 .$$

Lo studio fatto dalla distribuzione degli ioni nella regione della soluzione contigua agli elettrodi illustra pure bene a parer mio la interpretazione che dà il Billitzer [1]) del movimento di particelle sospese nei liquidi percorsi dalla corrente. Seguendo una idea di Nernst egli (se ben ho capito il significato della sua nota) imagina che gli ioni generati da un elettrodo che si comporta negativamente rispetto alla soluzione anzichè rimanere ad esso aderenti e costituire come pensava Helmoltz un vero e proprio doppio strato penetrino parzialmente nella soluzione; per tale maniera l' elettrodo e la regione della soluzione immediatamente contigua considerate come un tutto rigidamente connesso si comporterà come un corpo carico negativamente che si sposterà quindi sotto l' azione di un campo elettrico; il che giustifica la frase di Nernst, citata da Billitzer di uno stato di quasi-ionizzazione goduta dalle particelle sospese.

§ 2. — In un lavoro pubblicato nel volume 51° del *Z. für phys. Chemie*, pag. 65, Westhaver considera la polarizzazione

1) Annalen d. Physik, 1908, 11°, 987.

anodica di elettrodi di platino, di iridio e di rodio ed arriva (tra le considerazioni teoriche) ad una conclusione che a prima vista sembra diminuire tutta la importanza ed il significato dei punti di decomposizione elettrolitica. Come è noto, quando si applica una forza elettromotrice ε via via crescente a due elettrodi di cui l'uno è assai grande e quindi praticamente impolarizzabile, e l'altro assai piccolo e quindi praticamente polarizzabile in maniera perfetta, la intensita della corrente si mantiene assai piccola fino a che ε è inferiore ad un certo valore ε_0; oltre a questo valore essa cresce con straordinaria rapidità. Al valore ε_0 si dà il nome di valore di decomposizione.

Ora il Werthaver ragiona a questa maniera: Il punto di decomposizione è caratterizzato sulla curva rappresentativa del fenomeno (ascissa la differenza di potenziale, ordinata la intensità) da un minimo del raggio di curvatura; variando la unità di misura della intensità o (ciò che è equivalente) variando l' istrumento di misura adottato questo punto nel quale la curva ha massima curvatura si sposta e quindi possiamo far apparire il punto di decomposizione in un valore ε'_0 diverso dal primitivo ε_0.

Senonchè a parer mio un tale ragionamento è errato nelle sue premesse; giacchè il punto di decomposizione non è caratterizzato da un minimo del raggio di curvatura; come del resto nessun fenomeno fisico può esserne caratterizzato. Difatti il raggio di curvatura è dato da

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

che non è affatto omogenea rispetto alle dimensioni della grandezze che vi compaiono amenochè la y' non abbia dimensioni zero ossia x ed y rappresentino le misure di due grandezze fisiche della stessa natura. In un sistema di misura lasciato del tutto indeterminato essa non ha e non può avere alcun significato fisico; in altre parole essa non può rappresentare alcuna grandezza fisica. Ma il punto di decomposizione è caratterizzato invece dalla rapida variabilità delle y rispetto *alle ascisse e non rispetto all'arco della curva rappresentativa;*

è caratterizzato insomma da un massimo della $\frac{y}{x}$ (la quale rappresenta una resistenza) ossia da uno zero della espressione

$$y'x - y.$$

Questo punto di massimo coincide con il punto di contatto della tangente tirata dalla origine alla curva rappresentativa del fenomeno. Ora si vede facilmente che comunque si varii la scala secondo cui si misurano le intensità e le forze elettromotrici il punto di decomposizione così definito rimane immutato; come del resto succederebbe per il valore di x che annullasse una qualsiasi funzione

$$f(a\, b\, c\, d \ldots\ldots x\, y\, y'\, y'' \ldots\ldots)$$

omogenea rispetto alle dimensioni fisiche che vi compaiono.

La conclusione di Werthaver che dalla sola presenza dei cosidetti punti angolari (Knickpunkten) nelle curve che rappresentano la intensità in funzione della forza elettromotrice non si possa trarre alcuna conclusione sopra i processi che intervengono agli elettrodi mi sembra perciò doversi modificare col seguente enunciato che racchiude una semplicissima proprietà geometrica del tutto ovvia:

Nessun punto singolare e caratteristico di un fenomeno può essere definito da un minimo o massimo della curvatura della curva che lo rappresenta senza che sia fissata precedentemente la scala nella quale esso sia rappresentato graficamente.

E ciò muterebbe completamente il significato delle conclusioni di Wersthaver.

Firenze, R. Istituto di Studi superiori.

LETTERATURA FISICA

A. Fisica generale.

1. Generalità.

Annuaire pour l'an 1907 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Grimsehl E. Ueber den Hochschulunterricht für künftige Lehrer der Physik. *Zeit für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 1, 1907.

Schreter K. Das « funktionale Denken » im Physikunterricht. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 14, 1907,

2. Densità.

Earl of Berkeley. On the more Exact Determination of the Densities of Crystals. *Chem. News.* **95**, pag. 33, 1907.

3. Meccanica dei solidi. Elasticità. Potenziale.

(Cfr. C. 1; B. 6).

Appell P. et **Chappuis J.** Leçons de mécanique élémentaire, à l'usage des éléves des classes de mathématiques A e B. 2 éd. 244 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

See T. F. F. On the hypothesis underlying the deduction of the rigidity of the heavenly bodies. *Astr. Nach.* **173**, pag. 373, 1907.

Love A. E. H. Lehrbuch der Elastizität (Teubners Samml. v. Lehrb. a. d. geb. d. Math. Wiss. 24) XVI+664 pag. Leipzig, B. G. Teubner, 1907.

4. Meccanica dei Liquidi. Capillarità.

Ollivier H. Recherches sur la capillarité. *Ann. chim. et phys.* (8), **10**, pag. 229, 1907.

5. Meccanica degli aeriformi.

Tsoucalas P. et **Vlahavas J.** Étude comparative des hélicoptères et des aeroplanes. *Compt. Rend.* **144**, pag. 257, 1907.

Strachan P. and **Greenhill A. G.** The Flight of an Elongated Shot. *Nature.* **75**, pag. 367, 1907.

Kelvin. On Homer Lane's problem of a spherical gaseous Nebula, *Nature*. 75, pag. 368, 1907.

6. Apparecchi.

Grimsehl E. Ein Apparat zum Messen der Zusammendrückbarkeit des Wassers. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 7, 1907.

Steiger. Ueber einen neuen Gasentwickelungsapparat. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 32, 1907.

Reiff H. J. Eine neue und handliche Form des kompressions-Vakuummeters. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 124, 1907.

Felgentraeger W. Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage VI+310 pag. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907.

B. Fisica-chimica.

I. Generalità. Teoria. Pressione osmotica

Baxter G. P. und **Hines M. A**. Revision des Atomgewichtes von Mangan. *Chem. Zentralbl.* 1907, **1**, p. 12.

Berthelot D. Sur les poids moléculaires de divers gaz calculés par la méthode des densités limites. *Compt. Rend.* **144**, pag. 269, 1907.

Magri G. Ricerche sopra solventi inorganici a basse temperature. Disposizione sperimentale. *Rend. Acc. Lincei.* (5), XVI, pag. 171, 1907.

Mascarelli L. e **Martinelli M**. Sul comportamento crioscopico dei derivati jodilici sciolti in acido formico. *Rend. Acc. Lincei.* (5), XVI, pag. 183, 1907.

Barkla C. G. The atomic Weight of Nickel. *Nature*. **75**, pag. 368, 1907.

Colson A. Sur un état singulier de la matière observé sur un sel chromique dissous. *Compt. Rend.* **144**, pag. 325, 1907.

Monckmann J. On a natural system of arranging the chemical elements, in which they fall into the periodic groups, based solely upon the atomic volumes and the combining weights. *Chem. News*. **95**, pag. 5, 1907.

Le Bas G. A Relation between the Volumes of the atoms of certain Compounds of the Barlow-Pope Theory. *Chem. News*. **95**, pag. 33, 1907.

Chapman D. L. A Difficulty in Theory of Valency of W. Barlow and W. J. Pope. *Chem. News*. **95**, pag. 32, 1907.

Coates J. E. An examination of the lighter constituents of air. *Chem. News*. **95**, pag. 16, 1907.

2. Affinità. Solubilità. Assorbimento. Diffusione.

Holmes J. Beiträge zur Theorie der Lösungen. I. Die Natur der Molekularzustandes in wässerigen Mischungen der niederen Alkohole und der Fettsäuren. II. Molekulare Komplexbildung in flüssigem Zustande. III. Theorie der Nichtmischbarkeit von Flüssigkeiten. *Chem. Zentralbl.* 1, pag. 13, 1907.

Olie J. Einige Beobachtungen über die Entwässerung der isomeren Chromchloridhydrate. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 62, 1907.

Guertler W. und **Tamman G.** Ueber kupfernickellgierungen. *Zeit. für anorg. Chem.* 52. pag. 30, 1907.

Sand J. und **Kaestle K.** Dichromat und Cromat. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 101, 1907.

Olie J. Zur Frage nach den durch Silbersalze aus Lösungen des grünen Chromchloridhydrates fällbaren Chlormengen. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 48, 1907.

Menschutkin B. N. Ueber einige Kristallalkoholate. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 9, 1907.

Sand J. und **Eisenlohr F.** Zur Kenntnis der Polymolybdate I und II. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 68 e 87, 1907.

Findlay A. Einführung in die Phasenlehre und ihre Anwendungen VIII+224 pag. Leipzig, J. A. Barth, 1907.

Tammann G. Ueber die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen. Hamburg, L. Voss, 1907.

Kurnakow N. S. und **Zemczusnyj S. F.** Isomorphismus der Kalium und Natriumverbindungen. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 186, 1907.

Herz W. und **Anders G.** Ueber Löslichkeiten in Lösungsmittelgemengen IV. Die Löslichkeiten einiger Queeksilbersalze. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 164, 1907.

Menschutkin N. B. Ueber die Löslichkeit der Brom und Jodmagnesiums und über die Verbindungen dieser Salze mit Anilin und Phenylhydrazin. *Zeit. für anorg. Chem.* 52, pag. 152, 1907.

Soddy F. Calcium as an absorbent of gases for the production of high vacua and spectroscopic research. *Chem. News.* 95, pag. 13, 25, 1907.

3. Elettrochimica. Elettrolisi.

(Cfr. G. 4; G. 5).

Lorenz B. und **Buckstuhl W.** Untersuchungen über die Wanderung der Jonen bei der Elektrolyse eines geschmolzenen Salzpaares. *Zeit. für phys. Chem.* 52, pag. 41, 1907.

Cumming A. C. C. Contributions to the Study of strong Elektrolytes. *Nature* 75, pag. 228, 1907.

Cumming A. C. C. The electrochemistry of lead. *Nature.* 75, pag. 238, 1907.

Hollard A. und **Bertiaux L.** Metallanalyse aut elektrochemischen Wege. Autorisierte Deutsche Ausgabe. VIII+127 Seiten. Berlin. M. Krayn, 1907.

Rosset G. L'électrolyse des mélanges. *Éclair. électr.* **50**, pag. 234, 1907.

Fournier d'Albe E. E. L'application de la théorie des électrons à l'électrolyse. *The Electrician,* 18 gen. 1907. *(Éclair. électr.* **50**, pag. 237, 1907).

Chanoz M. Étude sur les contacts liquides directs. *Journ. de phys.* (4), VI, pag. 114, 1907.

Hasslluger R. Ueber das Wesen metallischer und elektrolytischer Leitung. *Wien. Anz.* pag. 3, 1907.

Cumming A. C. und **Abegg R.** Ueber die Ionisation des Silbernitrats. *Zeit. für Electrochem.* **13**, pag. 18, 1907.

Cumming A. C. und **Abegg R.** Zur Electrochemie des Bleies. *Zeit. für Electrochem.* **13**, pag. 19, 1907.

Cumming A. C. und **Abegg R.** Zur Eliminierung der Flüssigkeitspotentiale. *Zeit. für Electrochem.* **13**, pag. 19, 1907.

Müller E. und **Spitzer F.** Bildung von Kupferperoxyd dusch Elektrolyse. *Zeit. für Electrochem* **13**, pag. 25, 1907.

Fischer F. und **Massenez K.** Ueber die Darstellung von Ozon durch Elektrolyse. *Zeit. für anorg. Chem.* **52**, pag. 202, 1907.

Flaschner O. Studien über die Elektroreduktion des Hydroxylamins und der salpetrigen Säure. *Wien. Anz.* pag. 34, 1907.

4. Fotochimica.

Rudorf G. Die Dissociationstheorie in ihrer Anwendung auf die Lichtabsorption. *Zeit. für wiss. Phot.* 5, pag. 24, 1907.

Alefeld F. Eine neue Lichtwirkung und ihre photographische Methode. *Chem. Centralbl.* 1, pag. 208, 1907.

Trautz M. Ueber photochemische Verzögerung und Temperaturkoeffizient chemischer Reaktionen. *Chem. Centralbl.* 1, pag. 223, 1907.

Szilárd B. Notiz über das Uranylsilberchromat. *Chem. Centralbl.* 1, pag. 223, 1907,

5. Termochimica.

Langmuir Irving. Dissociation of Water-Vapour and Carbon Dioxide at High Temperatures. *Chem. Centralbl.* 1, pag. 6, 1907.

Haber F. Ueber die umkehrbare Einwirkung von Sauerstoff auf Chlormagnesium. Berichtigung. *Zeit. für anorg. Chem.* **52**, pag. 127, 1907.

6. Struttura. Cristallografia.

Barlow W. und **Pope W. J.** Eine Erörterung der Atomtheorie, welche chemische und kristallographische Struktur in Verbindung setzt und die Natur der Wertigkeit demonstriert. *Chem. Zentralbl.* 1907, **1**, pag. 2.

Goldschmidt V. Ueber influenzirte, induzierte und vikariirende Formen. *Zeit. für Krist.* **42**, pag. 596, 1907.

Tutton A. E. H. Ammoniumselenat und die Frage der Isodimorphie in der Alkalisalzreihe. *Zeit. für Krist.* **42**, pag. 529, 1907.

Lehmann O. Ueber flüssige Kristalle. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 42, 1907.

Freis R. Experimentaluntersuchungen über die Ausscheidungsfolge von Silikaten bei 2 und 3 Komponenten. *Neues Jahrb. f. Min. Beil. Bd.* 23, pag. 43, 1907.

Reinmann G. Beiträge zur Kenntniss des Turmalins aus Brasilien. *Neues Jahrb. f. Min. Beil.* Bd. 23, pag. 91, 1907.

Doelter C. Die Untersuchungsmethoden der Silikatschmelzen. *Zentralb. f. Min.* pag. 1, 1907.

C. Acustica.

1. Acustica fisica.

Kaeser F. Ueber das Mitschwingen eines tiefen Tones beim Anschlagen eines hohen, und mögliche Folgerungen, die sich daraus ergeben. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 123, 1907.

Marage M. Qualités acoustiques de certaines salles pour la voix parlée. *Journ. de phys.* (4), VI, pag. 101, 1907.

Stumpf. Beobachtungen über Kombinationstöne. *Berl. Ber.* 1907, 1.

2. Acustica musicale.

3. Acustica fisiologica.

Dupont M. Sur des courants alternatifs de périodes variées correspondant à de sons musicaux et dont les périodes présentent les mêmes rapports que les sons, effet physiologiques de ces courants alternatifs musicaux rythmés. *Compt. Rend.* **144**, pag. 226, 1907.

4. Apparecchi.

Palla J. Ein neues Verfahren zur Aufnahme und Wiedergabe von Lauten. *Der Mechaniker.* **15**, pag. 1, 1907.

Pflaum H. Ein thermoakustischer Apparat. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 26, 1907.

D. Calore.

1. Teoria meccanica del calore.

Lummer O. Ueber die Inversionstemperatur der Luft. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 53, 1907.

2. Teoria cinetica della materia.

Moulin H. Relations entre le volume et le covolume. *Journ. de phys.* (4), VI, pag. 111, 1907.

Bogdan P. L'équation de Van der Waals et l'état liquide. *Ann. scient. de Jassy.* 4, pag. 151, 1907.

3. Dilatazione e termometria.

Bahrdt W. Einige Schulversuche zur Ausdehnung von Gasen durch die Wärme. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 17, 1907.

4. Calorimetria.

Hort H. Ueber die Umwandlungswärmen von Eisen, *Phys. Zeit.* VIII, pag. 54, 1907.

5. Cambiamenti di stato. Proprietà dei vapori e dei gaz.

Pécheux H. Contribution à l'étude des alliages de l'Aluminium. *Rev. gen. des Sciences.* XVIII, pag. 111, 1907.

6. Sorgenti di calore.

7. Conducibilità termica.

8. Calore raggiante.

Freuchen P. B. Versuche mit einem Radiometer. *Zeit für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 28, 1907.

9. Apparecchi ed applicazioni termiche.

Czudnochowski (von) **B.** Physikalisches aus der Eisenbahntechnick. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 50, 1907.

Hort W. Die Brennstoffökonomie unserer Wärmekraftmaschinen. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 55, 1907.

Cerri J. F. Motori a gas sistema Cockerill. *Elettricista.* (2), VI, pag. 35, 1907.

E. Ottica.

1. Teoria.

Scheffler H. Beiträge zur Kenntniss des Astigmatismus von Linsen. *Zeit. f. Naturn.* 78, pag. 225, 1907.

2. Propagazione della luce, riflessione, rifrazione, dispersione, assorbimento, emissione.

Amar J. Sur la réfraction dans les gas composés. *Compt. Rend.* 144, pag. 260, 1907.

Adami. Ein einfacher Versuch über die Lichtbrechung. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 29.

Brühl J. W. The optical influence of contiguity of unsaturated groups. *Trans. of the Chem. Soc.* **91**, pag. 115, 1907.

Geuter P. Ueber die beim Phosphor auftretenden Emissionspektren. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 1, 1907.

3. Spettroscopia.

Fact and Theory in Spectroscopy. Presidential Address at the N. York Meeting of the American Association. *Nature.* **75**, pag. 353, 1907.

Deslandres H. et **d'Azambuja L.** Recherches sur l'atmosphére solaire. Vapeurs à raies noires et amas de particules. *Compt. Rend.* **144**, pag. 229, 1907.

König B. und **Zupanec J.** Zur Umkehrung der Natriumlinie. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 31, 1907.

Müller F. C. G. Schellbachsche Natriumröhre. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 31, 1907.

4. Sorgenti luminose. Fotometria.

Uppenborn P. Ueber die Bestimmung der mittleren Horizontal-Lichtstärke von Glühlampen. *Elektr. Zeit.* XXVIII, pag. 139, 1907.

Brodhun E. Messbare Lichtschwächung durch rotierende Prismem und ruhenden Sektor. *Zeit. für Instr. Kunde.* **27**, pag. 8, 1907.

5. Luminescenza.

Kowalski (de) J. Essai d'une théorie de la phosphorescence et de la fluorescence. *Compt. Rend.* **144**, pag. 266, 1907.

Wederkind E. Ueber eine mit grüner Chemiluminescenz verbundene Reaktion. *Zeit. für wiss. Phot.* 5, pag. 29, 1907.

6. Fotografia.

Rohr (von) **M.** Zur Erinnerung an Joseph. Max Petzval. *Zeit. für Instrkunde.* **27**, pag. 1, 1907.

Sommerfeldt E. Eine Grundfrage der chemischen Photographie. *Zentralbl. f. Min.* 1907, pag. 3.

7. Interferenza. Diffrazione.

Volkmann W. Ein objektiver Beugungsversuch zur Abbeschen Theorie des Mikroskopes. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 23, 1907.

Meslin G. Sur les spectres cannelés des réseaux paralléles. *Compt. Rend.* **144**, pag. 321, 1907.

8. Ottica dei cristalli, birifrangenza, polarizzazione.

9. Rotazione del piano di polarizzazione.

Betti M. Costituzione chimica e potere rotatorio. *Gazz. chim. ital.* XXXVII, pag. 62, 1907.

10. Ottica fisiologica.

König B. Die Funktion der Netzhaut beim Sehakte. *Wien. Anz.* 1907, pag. 5.

Morton A. Refraktion of the Eye, its Diagnosis and the Correction of its Errors. Chapter on Prisms. H. K. Lewis, 1907.

11. Apparecchi.

Konkoly (von) **N.** Ein neues Passagenprisma. *Astr. Nach.* **173**, pag. 370, 1907.

Lomb H. C. Ueber die Messung stark gekrümmter Linsen mit dem Abbeschen Sphärometer. *Deut. Mech. Zeit.* Gen. 1907, pag. 15.

Lincio G. Das neue Leitzsche mineralogische Mikroskopmodell. A. *Neues Jahrb. f. Min. Beil. Bd.* **23**, pag. 163, 1907.

F. Magnetismo.

1. Generalità. Teoria.

2. Misure. Apparecchi.

Bouasse H. et **Berthier.** Sur les relations entre l'aimantation et la torsion. I Mémoire: Variations de l'aimantation par la torsion. *Ann. de chim. et de phys.* (8), **10**, pag. 199, 1907.

G. Elettricità.

1. Teoria.

Lecher E. Ueber das ohmsche Gesetz und die Elektronentheorie. *Wien. Anz.* 1907, 4.

2. Elettrostatica. Macchine elettriche.

Malclés L. Recherches expérimentales sur les diélectriques solides. *Compt. Rend.* **144**, pag. 264, 1907.

Bandl E. Ueber das Verhalten dünnes Aluminiumfolie in einem elektrostatischen Feld. *Phys. Zeit.* VIII pag. 114, 1907.

Magini R. Ueber den Einfluss des Schlitzes auf die Kapazität eines Kondensators mit Schutzzing. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 39, 1907.

3. Scariche elettriche attraverso conduttori e dielettrici.

Battelli A. e **Magri L.** La scintilla elettrica nel campo magnetico. *Rend. Acc. Linc.* (5), XVI, pag. 155, 1907.

4. Sorgenti di elettricità. Polarizzazione.

Goetze R. Praktische Winke für die Aufstellung und Behandlung non Accumulatoren-Batterien. *Centralbl. für Accum.* 8, pag. 29, 1907.

Talén E. Trockenelement. *Centralbl. für Accum.* 8, pag. 32, 1907.

Möllenbruck W. und **Dielmann W.** Verbesserung an Kohlenelektroden für Primärelemente. *Centralbl. fur Accum.* 8, pag. 33, 1907.

5. Conducibilità. Resistenza.

Schrott P. Das elektrische Verhalten der allotropen Selenmodifikationen unter dem Einflusse von Wärme und Licht. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 42, 1907.

Pecheux H. Contribution à l'étude des alliages de l'Aluminium. *Rev. gen. des Scienc.* XVIII, pag. 112, 1907.

6. Fenomeni termici.

Russner J. Ueber Licht-und Wärmeenergie von Glühlampen. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 120, 1907.

7. Fenomeni luminosi.

8. Elettromagnetismo, para e diamagnetismo.

Corbino O. M. L' isteresi magnetica del ferro per correnti di alta frequenza. *Rend. Acc. Linc.* (5), XVI, pag. 167, 1907.

Ascoli M. Elettromagneti di dato diametro esterno e di massimo flusso. *Elettricista.* (2), VI, pag. 38, 1907.

9. Elettrodinamica e induzione.

De A. Silva O. Sur la méthode de Pirani. *Eclair electr.* **50**, pag. 113, 1907.

Emde F. Blondels Ableitung seiner Induktions-koeffizienten für gerade Drähte. *Elektr. Zeit.* XXVIII, pag. 185, 1907..

10. Oscillazioni elettriche.

Mosler Dr. Beiträge zur Erzeugung schwach gedämpfter Schwingungen. *Elektr. Zeit.* XXVIII, pag. 142, 1907.

Vreeland F. K. Production d'oscillations électriques entretenues. *Electr. Wordl.* 19 gen. 1907. (*Eclair électr.* **50**, pag. 246, 1907).

Wien M. Nachtrag zu meinem Aufsatz « Ueber die Abstimmung funkentelegraphischer Sender ». *Phys Zeit.* 8, pag. 38, 1907.

11. Magneto-ed elettro-ottica.

Aeckerlein G. Ueber eine Fundamentalfrage der Elektrooptik. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 117, 1907.

Schott G. A. Jonisation and Absorption and Anomalous Dispersion. *Nature*. 75. pag. 271, 1907.

12. Raggi Catodici, Röntgen, ecc.

Matout L. La phosphorescence cathodique. *Le Radium*, 4, pag. 20, 1907.

Kinoshita S. Spektralanalytische Beobachtungen an Kanalstrahlen in zusammengesetzten Gasen. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 35, 1907.

Dessauer F. Eine neue Anwendung der Röntgenstrahlen. *Verh. der deut. Phys. Ges.* 9, pag. 49, 1907.

13. Radioattività e ionizzazione.

Allen I. H. The Photoelectric Fatigue of Zinc. *Nature*. 75, pag. 262, 1907.

Allen I. H. Die Geschwindigkeit und das Verhältnis e/m beiden primären β-Strahlen des Radiums *Naturw. Rundsch.* 22, pag. 9, 1907.

Bronson L. H. The Effect of Temperature on the Activity of Radium and its Transformation Products. *Nature*. 75, pag. 262, 1907.

Grassi U. La conduttività dell'acqua disaerata in presenza delle emanazioni del radio. *Rend. Acc. Linc.* (5), XVI, pag. 179, 1907.

Boltwood B. B. Ueber die letzten Zerfallprodukte der radioaktiven Elemente. II. Die Zerfallsprodukte des Urans. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 97, 1907.

Kucera B. Zur Zerstreuung der α-Strahlen in Metallen. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 103, 1907.

Schmidt A. Ueber die Radioaktivität einiger Süsswasserquellen des Taunus. III. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 107, 1907.

Henrich F. Untersuchungen über die Thermalquellen von Wiesbaden und deren Radioaktivität. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 112, 1907.

Rutherford E. Die Radioaktivität. Deutsche Ausgabe von E. Aschkinass. VIII+597 Seiten. Berlin J. Springer.

Levin M. Quelques propriétés de l'actinium. *Le Radium*. 4, pag. 27, 1907.

Schmidt G. C. und **Hechler W.** Die elektrische Leitfähigkeit von Salzdämpfen. *Verh. D. Phys. Ges.* 9, pag. 39, 1907.

Hess V. F. Ueber das Uran x und die Absorption seiner α-Strahlung. *Wien. Anz.* pag. 11, 1907.

Strutt R. J. Helium and Argon in Common Rocks. *Nature*. 75, pag. 271, 1907.

Rutherford E Production of Radium from Actinium. *Nature*. 75, pag. 270, 1907.

14. Elettrotecnica. Telefonia e Telegrafia.

Görges H. Die Berechnung der E. M. K. von Mehrphasen-und Einphasen-wickelungen auf Grund eines Vektordiagrammes der Feldstärke. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 1, 1907.

Benischke G. Der Resonanz-Transformator. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 25, 1907.

Pickard G. W. Mesures de l'énergie reçue dans des postes radiotélégraphiques. *The Electrician.* 11 gen. 1907. (*Éclair Électr.* **50**, pag. 214, 1907).

Joung E. I. Sur l'inductance et l'impédance des circuits télégraphiques et téléphoniques. I. *The Electrician.* 4 gen. 1907. *Éclair Électr.* **50**, pag. 216, 1907.

Poincaré H. Étude du récepteur téléphonique. *Éclair Électr.* **50**, pag. 222, 1907.

Young E. Sur l'inductance et l'impédance des circuits télégraphiques et téléphoniques. II. *The Electrician.* 4 gen. 1907. (*Éclair Électr.* **50**, pag. 247, 1907).

Allen I. Nouvelle lampe au tungsténe, *Electr. World.* 5 gen. 1907. (*Éclair Électr.* **50**, pag. 249, 1907).

Parker H. C. and **Clark W. G.** Nouvelle lampe à incandescence Helion. *Electr. World.* 5 gen. 1907 (*Éclair Électr.* **50**, pag. 250, 1907).

— Nouvelle lampe à incandescence à filament métallique. *The Electrician.* 18 gen. 1907. (*Éclair Électr.* **50**, pag. 251, 1907).

Wien M. Ueber die Abstimmung funkentelegraphischer Sender. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 38, 1907).

Orlich E. Notiz über die Leistungsmessung in Drehstromsystemen mit Nulleiter. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 71, 1907.

— Marconi-Ausrüstungen auf Schiffen. *Electr. Rev.* **60**, pag. 191, 1907.

15. Unità.

16. Misure. Apparecchi.

Hemsalech G. A. et **Tissot C.** Sur les phénomènes de résonance dans le cas des transformateurs à circuit magnétique ouvert et leur utilité dans la production de fortes étincelles électriques. *Compt. Rend.* **144**, pag. 262, 1907.

Grimsehl E. Ein apparat für Magnetinduktion. *Zeit. fur phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 11, 1907.

Korn A. Ueber neue Methoden der elektrischen Fernphotographie. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 118, 1907.

— Die Osramlampe. *Deut. Mech. Zeit.* Gen. 1907, pag. 8.

— Ein Quecksilberkommutator. *Deut. Mech. Zeit.* Gen. 1907, pag. 8.

Ubisch G. Das Galvanometer als Nullinstrument bei Wechselstrommessungen. *Verh. der deut. phys. Ges.* 9, pag. 61, 1907.

H. Fisica terrestre e Meteorologia.

1. Generalità. Teorie.

Joly J. Radium and Geology. *Nature.* 75, pag. 341, 1907.

Denning W. F. February and March Meteors. *Nature.* 75, pag. 342, 1907.

Bigourdan G. Sur la relation entre les chutes de la pression barométrique et les dégagements de grisou dans les mines. *Compt. Rend.* 144, pag. 247. 1907.

Hollmann M. Wetterkunde, Eine allgemeinverst. Anleit. zur Beurteilg. der Wetterlage. 52 pag. Berlin. P. Parey, 1907.

2. Geodesia. Misure geodetiche e di gravità.

Crandall C. L. Text-Book on Geodesy and Last Squares prepared for the Use of civil Engineering Students. London. Chapman and Hall. 1907.

Pizzetti P. Paragone fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati. *Rend. Acc. Linc.* (5), XVI, pag. 149, 1907.

Pagnini P. Nouvelle méthode pour la détermination de l'intensité de la pesanteur. *Journ. de Phys.* (4), VI, pag. 127.

3. Magnetismo terrestre. Correnti telluriche. Luce polare.

Chree C. Magnetic Storm and Aurora on February 9-10. *Nature.* 75, pag. 365, 1907.

Villard P. Sur l'aurore boréale. *Le Radium.* 4, pag. 1, 1907.

Störmer C. Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace. *Le Radium.* 4, pag. 2, 1907.

4. Studio dell'alta atmosfera.

Köppen. Novemberwärme in den höheren Luftschichten über Mitteleuropa, *Met. Zeit.* 24, pag. 37, 1907.

Innes K. J. A. Richtung des Wolkenzuges zu Johannesburg, Transvaal, in den Jahren 1904 bis 1906. *Met. Zeit.* 24, pag. 44, 1907.

5. Meccanica e termodinamica dell'atmosfera. Venti.

Ekholm N. Ueber die unperiodischen Luftdruckschwankungen und einige damit zusammenhängende Erscheinungen. *Met. Zeit.* 24, pag. 1, 1907.

Gorodensky M. Ueber den Guldberg-Mohnschen Ablenkungswinkel. *Met. Zeit.* 24, pag. 25, 1907.

6. Ottica dell'atmosfera.

Offord I. The green Tints of Sunset. *Nature*. 75, pag. 342, 1907.

7. Elettricità atmosferica.

Koenigsberger J. Ueber die Elektrizitätszerstreuung in verschiedenen Orten. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 33.

8. Temperatura del suolo.

Leprince-Ringuet F. Mesures géothermiques effectuées dans le bassin du Pas-de-Calais. *Compt. Rend.* **144**, pag. 347.

9. Terremoti e vulcani.

The Eruption of Matavanu in Savaii. 1905-06. *Nature*. **75**, pag. 351. 1907.

Schuster A. Ueber die durch seismische Wellen hervorgerufene Oberflächenbewegung. *Phys. Zeit.* VIII, pag. 51, 1907.

Hecker O. Einrichtung für eine variabele Dämpfung des Horizontalpendels *Zeit. fur Intr. Kunde.* **27**, pag. 6, 1907.

10. Climatologia.

Dordscheid O. Die mittlere Dauer des Frostes auf der Erde. *Met. Zeit.* **24**, pag. 11, 1907.

Ficker H. Föhn in den Ostalpen am 7 und 8 November 1906. *Met. Zeit.* **24**, pag. 30, 1907.

Johanson O. Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von Prof. G. Hellmann: « Ueber die Eintrittszeiten der täglichen Temperaturextreme ». *Met. Zeit.* **24**, pag. 31, 1907.

Maurer J. Abnorme Verteilung der Niederschlagsmengen auf der Nordseite der Alpen im Sommer 1906. Sehr warmer Oktober 1906. *Met. Zeit.* **24**, pag. 35, 1907.

Osthoff H. Strenger Winter 1905-06 in Mesopotamien. *Met. Zeit.* **24**, pag. 41. 1907.

Prohaska H. N W-Föhn in Graz am 25 Nov. 1906. *Met. Zeit.* **24**, pag. 41, 1907.

Siegel F. Regenfall in Rio de Janeiro und dessen Schwankungen. *Met. Zeit.* **24**, pag. 42, 1907.

11. Apparecchi.

Steffens O. Die Methoden und Instrumente der Feuchtigkeitsbestimmung. Nachtrag. *Der Mechaniker.* **15**, pag. 4, 1907.

Ellemann F. Ein Apparat zum Nachweis der Luftdruckabnahme für kleine Höhenunterschiede. *Zeit fur phys. u. chem. Unt.* XX, pag. 30, 1907.

Hellmann G. Wage-Ombrograph Rohrdanz. *Met. Zeit.* **24**, pag. 39, 1907.

L. Storia della fisica.

Slaby A. Otto von Guericke. Festvortrag aus Anlass der Grundsteinlegung der Deutschen Museums zu München, gehalten un Wittelsbachpalais am 13 Nov. 1906. Berlin, J. Springer, 1907.

M. Trattati.

Basin J. Physique élémentaire III Volume, 5 éd. 177 pages. Paris, Vuibert et Nony, 1907.

Bonant E. Problémes de baccalauréat à l'usage des élèves de seconde e première C et D, de mathématique A et B, et des candidats au baccalauréat, 5 éd. 326 pag. Paris, Vuibert et Nony, 1907.

Fairre-Dupaigre J. et **Carimey E.** Cours élémentaire de physique. VIII+191 pages. Paris, Masson et Cie, 1907.

Sumpf K. Grundriss der Physik. Neue Ausgabe bearbeitet von A. Pabst und H. Hartenstein, Mit 465 Abbildungen. 3 Aufl. VIII+260 Seiten. Hildesheim. A. Lax, 1907.

Helmholtz H. (von). Vorlesungen über theoretische Physik. 4. Vorlesungen über Elektrodynamik und Magnetismus. Herausgegeben von O. Krigar Menzel und M. Laue. X+406 Seiten. Leipzig, A. Barth. 1907.

Bertrand J. Calcul des probabilités. 2 éd. LVII+322 pages. Paris, Gauthier Villars, 1907.

Hartwig J. T. Einführung in die praktische Physik in gemeinverständlicher Darstellung. Stuttgart, E. H. Moritz, 1907.

Allen A. O. Advanced Examples in Physics. 64 pag. E. Arnold. 1907.

NOTIZIARIO

— Il 17 febbraio moriva il fisico e meteorologo tedesco W. v. Bezold. Della sua opera scientifica sarà detto estesamente nel prossimo fascicolo.

— Si annunzia la morte del prof. Russel, direttore del servizio astronomico di New South Wales e del chimico olandese Roozeboom, il noto fervente apostolo della regola delle fasi, del chimico russo Menschutkin, conosciuto per i suoi lavori sulla velocità di eterificazione in rapporto alla costituzione dei relativi alcools ed acidi.

— Nel fascicolo scorso abbiamo annuziato la morte del chimico russo Mendelejeff. La sua alta fama è dovuta principalmente alla legge periodica degli elementi che è stata la guida delle ricerche di chimica inorganica nell'ultimo quarto di secolo. Fra i suoi lavori di fisico-chimica ricordiamo le ricerche sulla dilatazione dei liquidi, sul loro comportamento ad alte temperature e pressioni, sulla densità dei miscugli di alcool ed acqua, ed in generale sullo stato delle sostanze in soluzione e sugli idrati che esse formano. Dell'opera del chimico Moissan poi ricordiamo l'isolamento del fluoro, la costruzione del forno elettrico che ha esteso così notevolmente lo studio dei corpi alle altissime temperature, la produzione del carburo di calcio, del diamante e la distillazione dei metalli.

— Il professore Larquier è stato chiamato alla cattedra di Fisica sperimentale nell'Università di Losanna.

— Tra le recenti nomine a membri della Royal Society sono comprese quelle dei fisici Bragg, Duddel, Lord Blythswood.

— La Western University of Pensylvania conferirà prossimamente il grado di dottore « honoris causa » a Guglielmo Marconi.

— Il « Cavendish Laboratory » di Cambridge verrà ampliato. La spesa comporterà circa 200.000 lire, a cui contribuiranno fra altri J. J. Thomson e Lord Rayleigh.

— Si annunzia la fondazione a Rotterdam di un nuovo periodico in lingua Esperanto, dal titolo « Gazeto Matematika Internacia ».

— La Casa Longmans e Green di Londra ha edito in due volumi le opere di W. Gibbs.

— La nota fabbrica ottica « Goerz » festeggia un interessante giubileo doppio: la costruzione del 100.000 binoccolo a prisma e del 200.000 obbiettivo di precisione.

— In Inghilterra ove l'organizzazione degli alti studi scientifici e la popolarizzazione della coltura è in gran parte dovuta all'iniziativa privata, si è fondata una *Guilde* scientifica; la lega ha per scopo la propagazione della scienza, la difesa degli interessi scientifici ed esercita una vera azione sociale.

— L'Accademia delle Scienze di Torino bandisce, per il lascito Vallauri, un premio di lire 28.000 all'autore del migliore lavoro nel campo delle scienze fisiche e pubblicato fra il 1° gennaio 1907 ed il 31 dicembre 1910. Il premio Bressa di lire 9.300 per le più insigni scoperte od opere in scienze fisiche e sperimentali scade il 31 dicembre 1908.

— La Società d'Incoraggiamento in Padova ha aperto un concorso ad un premio di lire 10.000 per una memoria sul tema: Considerare con uno studio completo teorico pratico quali sieno allo stato attuale i risultati dell'impiego dell'energia elettrica alla trazione ferroviaria e congeneri nei diversi paesi, indicando dal punto di vista tecnico ed economico il modo migliore per giungere ad utilizzare a questo scopo le forze idrauliche inoperose esistenti in Italia.

— Tra i premi a concorso proposti per dirigibili o macchine per volare segnaliamo quello del « Matin » di Parigi in 250.000 lire per il percorso Parigi-Londra in 24 ore, quello del « Daily Mail » di Londra, in 250.000 lire, per il percorso Londra-Manchester, quello della Società dei bagni di Ostenda in 160.000 marchi per il percorso Parigi Ostenda in 24 ore.

— La Società Meteorologica Francese ha conferito al Conte d'Oultremont la medaglia di premio alla migliore memoria di Meteorologia Aeronautica.

— Nel prossimo estate, sul dirigibile Zeppelin saranno istituite delle esperienze per stabilire comunicazioni radiotele-

grafiche nei due sensi, fra il pallone ed una stazione terrestre fissa.

— In una recente conferenza a Parigi dell' esploratore norvegese Amundsen sul suo viaggio alla ricerca del polo magnetico Nord, sono stati resi noti alcuni risultati. Le osservazioni magnetiche cominciate il 2 novembre 1903 durarono 19 mesi e furono eseguite sia in una piccola baia della terra di Re Guglielmo, sia in escursioni sino presso il polo stesso nella penisola della Boothia Felix; lo spoglio delle osservazioni richiederà non meno di 3 anni di lavoro.

— La sera del 3 ottobre 1907 i quattro maggiori satelliti di Giove saranno contemporaneamente occultati dal pianeta.

— Tutte le missioni spedite ad osservare l' èclisse totale di sole del 14 gennaio nell'Asia minore, hanno completamente fallito per le condizioni meteorologiche sfavorevoli.

— Il prof. J. C. Kapteyn di Groninga propone un' intesa internazionale mirante alla soluzione di vari problemi concernenti la struttura dell' universo siderale.

— A Mileto di Calabria il padre Alfani ha inaugurato due sismografi Omori.

— È ritornato l' yacht « Otaria » dopo una crociera destinata a scandagli dell'alta atmosfera sull'Atlantico tropicale. Tra gli interessanti risultati riportati è a rilevarsi questo, che nell'estate, sopra l'equatore, esistono temperature molto basse (sino a —80°) sopra i 12 Km., analoghe a quelle che si riscontrano d'inverno, alla medesima altezza, alle nostre latitudini.

— Il Congresso dell'Associazione Britannica per l' avanzamento delle Scienze si terrà quest'anno a Leicester dal 31 luglio al 7 agosto.

— Il Congresso dei Naturalisti e Medici Tedeschi si terrà quest'anno a Dresda dal 15 al 21 settembre.

— Segue l' elenco dei corsi di fisica-matematica e fisica che si danno in quest' anno nelle varie Università Italiane omettendo quei corsi ufficiali, il cui programma è noto. Saremmo grati a chi ci fornisse rettifiche od ulteriori aggiunte al presente elenco.

Bologna. Donati: metodi generali della fisica matematica, teoria degli elettroni.

Catania. Lauricella: equazioni funzionali del potenziale e dell' elettrostatica. Boggio Lera: elettricità e magnetismo.

Firenze. Pucciauti: fisica terrestre. Grassi: misure elettriche.

Genova. Tedone: analisi vettoriale, cinematica e statica dei mezzi continui. Garbasso: introduzione all' elettrotecnica. Del Lungo: fisica terrestre.

Messina. Marcolongo: elettrodinamica, teoria del Lorentz ed applicazioni all'ottica. Orlando: equazioni differenziali parziali della fisica matematica.

Modena. Bonacini: radiazione solare. Malagoli: correnti alternanti.

Napoli. Pinto: elettrostatica. Siacci: teoria generale della dinamica. Campanile, Di Ciommo e Del Gaizo: fisica sperimentale. Scarpa: chimica fisica.

Padova. Levi Civita: campi elettromagnetici, dinamica dell' elettrone. Ricci: elasticicità ed applicazioni all' ottica. Gnesotto: nozioni sulle misure elettriche, elementi di termodinamica.

Palermo. Torelli: equazioni differenziali della fisica matematica. Venturi: teoria della forma della terra e teoria delle maree.

Parma. Cardani: fisica chimica. Bartorelli: elettricità medica.

Pavia. Almansi: teoria matematica dell'elasticità.

Pisa. Maggi: principii dell' elettricità. Pizzetti: Astronomia sferica e perturbazioni planetarie. Nasini: fisica chimica. Battelli: fenomeni tellurici e atmosferici.

Roma. Volterra: I. Equazioni integrali e loro applicazioni alla fisica matematica. II. Forme d'equilibrio di masse fluide rotanti e applicazioni alla meccanica celeste. Sella: capitoli scelti d'ottica ed elettrologia. Bisconcini: teoria dell'elasticità.

Torino. Somigliana: elasticità. Morera: idrodinamica. Campetti: elettrochimica.

Pietro Salvioni, *gerente responsabile.*

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Hanno fatto adesione alla Società i signori

Bordoni Ing. Ugo	R. Scuola Applicaz. d. Ingegn., Roma
Eredia Dott. Filippo	Via del Caravita 7 A, Roma
Manzetti Riccardo	Tivoli

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCCXXVII.

Hanno pagato la quota del 1906 i Soci:

Amaduzzi Lavoro
Cantone Michele
Giorgi Giovanni
Omodei Domenico
Puccianti Luigi

Hanno pagato la quota del 1907 i Soci.

Alessandrini Eugenio
Cantone Michele
Canuto Sebastiano
Giorgi Giovanni
Jona Emanuele
Manzetti Riccardo
Marangoni Carlo
Pacinotti Antonio
Rebustello Attilio

Serie V. Vol. XIII. Aprile 1907.

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA
SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

PUBBLICATO PER CURA DEI DIRETTORI
A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA
E DEI DELEGATI DELLA SOCIETÀ
G. P. GRIMALDI ED A. SELLA

INDICE

PISA DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1907

GUGLIELMO VON BEZOLD

(21 Giugno 1837-17 Febbraio 1907).

Il 17 febbraio scorso moriva Guglielmo von Bezold, professore all'Università di Berlino e Direttore dell'Ufficio Meteorologico Prussiano; con lui la Meteorologia perde uno dei suoi più illustri cultori, perde colui che ne iniziò e ne impose la trasformazione da scienza geografico-statistica in una vera e propria fisica dell' atmosfera.

Nato il 21 giugno 1837 in Monaco da antica famiglia patrizia bavarese, si addottorò all'Università di Gottinga nel 1860; libero docente all'Università di Monaco nel 1861, veniva nel 1866 nominato professore straordinario di Fisica tecnica al Politecnico della sua città natale; dieci anni dopo la sua promozione ad ordinario, nel 1878, riceveva la nomina a Direttore dell' Ufficio Meteorologico Bavarese. Le sue eminenti doti di scienziato e di organizzatore, che in questo ufficio trovarono campo adatto al pieno loro svolgimento, gli procurarono nel 1885 l' invito a Berlino a succedere al Dove nel posto di Direttore dell'Ufficio Meteorologico Prussiano e fecero creare per Lui la cattedra di Meteorologia nell'Università Berlinese.

La riorganizzazione della rete meteorologica Prussiana, l'ampliamento dell'Istituto Meteorologico, la costruzione ed organizzazione degli Osservatori meteorologico e magnetico di Potsdam e degli Osservatori di montagna sul Brocken e sulla Schneekoppe e finalmente l'impianto dell' Istituto aeronautico di Tegel, ora trasferito a Lindenberg, primo nel suo genere

in tutto il mondo, stanno ad attestare le sue qualità di organizzatore e di scienziato.

L'attività scientifica del von Bezold si estrinsecò principalmente in tre rami della fisica: l'ottica, l'elettricità e la meteorologia.

In ricerche che nella mole della sua produzione scientifica appaiono di secondaria importanza egli richiama (1869) l'attenzione sulla penetrazione di carica nel dielettrico di un condensatore in contradizione coll'ipotesi della separazione molecolare sostenuta da R. Kohlrausch; combattendo le vedute del Riess dà (1871) la nota spiegazione del modo di funzionare dell'elettroforo, e studia sperimentalmente la propagazione dell'elettricità in mezzi anisotropi come il legno e il caucciù stirato; indagando le analogie che esistono fra i fenomeni della propagazione delle correnti stazionarie di elettricità e di calore ed i fenomeni della diffusione dei gas svolge (1877-78) una teoria unica che, pur essendo affatto indipendente dalla natura dei fenomeni stessi, permette di dimostrarne le modalità. A Lui si devono la scoperta (1880) delle particolarità della scarica elettrica fra punta e piano, la nota esperienza (1883) con cui si può dimostrare anche ad un uditorio numeroso la rifrazione delle linee equipotenziali in una lamina composta di due metalli diversi percorsa dalla corrente elettrica, la dimostrazione sperimentale della rifrazione delle linee di forza nei dielettrici invano tentata prima di Lui dal Mascart, e finalmente (1884) un dispositivo sperimentale per rilevare l'influenza del dielettrico nei fenomeni dell'induzione elettrostatica.

Dove appare però maggiormente la perspicacia dell'osservatore e l'abilità dello sperimentatore è là dove con mezzi semplicissimi, direi quasi primordiali, esempio mirabile ai moderni cultori delle scienze sperimentali, basandosi sulla semplice osservazione delle figure di Lichtenberg o affini, dimostra (1869) l'oscillatorietà delle scariche elettriche in determinate condizioni, descrive per primo (1870) i fenomeni della propagazione delle onde elettriche lungo un filo isolato, ne dimostra

la riflessione all'estremità e i conseguenti fenomeni d'interferenza fra onda incidente e onda riflessa e infine trova sperimentalmente la indipendenza della velocità di propagazione di queste onde dal materiale di cui è costituito il filo stesso, precorrendo così di quasi 15 anni le classiche esperienze dell'Hertz.

Dei suoi lavori d'ottica, oltre uno studio minuto della visione binoculare (1865), la trattazione (1870) di alcuni problemi di fotometria e la deduzione analitica (1872) della legge dei colori complementari dalla teoria Young-Helmholtz, ricorderemo i dispositivi sperimentali da Lui ideati e descritti per la spettrofotometria dei colori dei pigmenti (1876), per lo studio del triangolo Newtoniano dei colori (1884), per la scomposizione della luce in colori complementari, per l'esame delle illusioni ottiche e infine un lavoro (1884) inteso a studiare sperimentalmente la dipendenza fra la temperatura di un filo incandescente e la composizione della luce emessa.

Ma la sua attività scientifica doveva finire per svolgersi esclusivamente nel campo vastissimo degli imponenti e multiformi fenomeni dell'atmosfera e la spinta ultima a questo gli venne oltre che dalle sue tendenze artistiche e dalla mancanza in Monaco di un laboratorio adatto che gli consentisse la prosecuzione dei suoi lavori sperimentali, da un caso puramente fortuito: da una conversazione avuta con K. A. Steinheil. Avendo questi espressa l'opinione che la forma a largo spiovente dei tetti delle case e capanne alpine fosse un ottimo riparo contro il pericolo del fulmine perchè tengono la pioggia lontana dai muri impedendone così una conducibilità elettrica marcata, Egli volle verificare col metodo statistico se ciò fosse probabile ed iniziò così (1869) sulla base degli Atti dell'Ufficio d'Assicurazioni contro gli incendi quella bellissima serie di lavori statistici sui temporali che sono un vero modello del genere. Man mano sviluppando il sistema d'informazioni Egli giunse a conclusioni di estrema importanza sulla frequenza e sulla distribuzione dei temporali in Baviera (1869), sull'influenza dei corsi d'acqua, dei boschi e delle elevazioni di terreno sullo sviluppo dei fenomeni temporaleschi, sull'accrescimento continuo della frequenza del fulmine, sulla perio-

dicità della frequenza dei temporali (1874), sulla distribuzione e sulla variazione degli elementi meteorologici prima, durante e dopo lo svolgersi delle meteore temporalesche (1875), ponendo così le basi di quegli studi che dovevano poi essere continuati dallo Schiapparelli, dal Lang, dal Ferrari, dal Prohaska ecc. e dovevano procurare a Lui prima la nomina a Direttore dell'Ufficio Meteorologico Bavarese e in appresso l'onorifica chiamata a Berlino con la sua conseguente dedica totale agli studi meteorologici.

Nel 1888, riorganizzato l'Ufficio Meteorologico Prussiano, Egli inizia i suoi studi importanti sulla termodinamica dell'atmosfera: fino allora il problema fondamentale della Meteorologia era stato attaccato solo dal punto di vista precipuamente meccanico e se qualcuno aveva cercato di introdurre qualche considerazione nei processi termici si era però limitato ai soli processi adiabatici. Il Bezold intuisce come non fosse da attendersi molto pel progresso della scienza meteorologica da questa meccanica pura dell'atmosfera la quale se, semplificando il problema, aveva consentito un primo studio approssimato della circolazione generale dell'aria atmosferica, non aveva e non può avere da sola, specialmente nel campo pratico dello studio dei fenomeni meno generali, quell'importanza che si vuole ancora adesso ammetterle da taluni. Il Bezold quindi, lasciando da parte l'elemento meccanico puro, introduce senz'altro nelle sue considerazioni l'elemento termodinamico, dimostra la necessità di considerare anche i processi non adiabatici come quelli che nei fenomeni locali hanno spesso la maggiore importanza e, seguendo Egli questa volta gli studi precedenti dell'Hertz, riassume i vari stati in cui può presentarsi una certa massa d'aria atmosferica in 4 stadi principali: I. Stadio d'aria secca o d'aria non satura in cui le proporzioni d'aria e vapor acqueo rimangono costanti, la precipitazione è esclusa e l'immissione di una quantità apprezzabile di vapore acqueo è solo possibile in vicinanza del suolo; II. Stadio di pioggia o d'aria satura in cui le variazioni di stato possono avvenire in un senso solo cioè per volumi decrescenti; III. Stadio di grandine in cui l'acqua compare contemporaneamente nelle sue tre fasi, la temperatura è prossima a 0° e l'unico

processo possibile è l'espansione isoterma; IV. Stadio di neve in cui la temperatura è inferiore a 0°. Per ciascuno di questi stadi Egli sviluppa l'equazione di stato che, trattata col metodo grafico di Clapeyron, applica allo studio del *Föhn* e degli scambi d'aria fra cicloni ed anticicloni nelle varie stagioni, raggiungendo nella trattazione di problemi così complicati una semplicità veramente straordinaria. Dà al *Wärmegehalt* di una massa d' aria, elemento nuovo da Helmholtz introdotto nella Meteorologia fisica, il nome più preciso di temperatura potenziale definendo questa come la temperatura assoluta che la massa d'aria assumerebbe se venisse portata adiabaticamente a pressione normale, dimostra che questa temperatura potenziale è maggiore in alto che in basso, che vi possono essere delle inversioni del gradiente termico verticale, fatto di estrema importanza la cui reale esistenza venne dimostrata poi dai risultati delle ascensioni aeronautiche a scopo meteorologico.

Studiando i fenomeni della convenzione composta, ossia quella in cui, oltre il trasporto di masse d'aria a diverse temperature, si considerano anche i possibili processi di condensazione ed evaporazione, dimostra che i processi adiabatici nell'atmosfera libera, quando non vi sia evaporazione, o non alterano la temperatura potenziale o la innalzano e ciò tanto più quanto maggiore è la condensazione; da questo teorema deduce: che in un movimento verticale puramente adiabatico con eventuale condensazione il gradiente termico verticale medio è sempre minore nella colonna ascendente che nella discendente, nell'aria umida vicina alla condensazione che nell'aria secca: che se la temperatura potenziale è costante in uno strato, il gradiente ha in esso il valore noto 0°,993, ma se in alto la temperatura potenziale è maggiore, il gradiente è più piccolo ed è tanto minore quanto maggiore è la differenza delle temperature potenziali.

Iniziata in tal modo la trasformazione della Meteorologia in una vera e propria Fisica dell'atmosfera e dimostrata l'importanza dello studio termodinamico dei processi meteorologici, Egli passa ad applicare i risultati ottenuti ai varî problemi pratici: Lo studio dei fenomeni che avvengono nei miscugli di masse d'aria a differenti temperature e a diverse umidità

assolute gli permette di indagare perfino quantitativamente il problema della condensazione e delle precipitazioni di fissare le condizioni in cui queste sono massime; le sue considerazioni lo conducono ad una chiara concezione delle varie cause e del meccanismo della formazione delle nebbie e delle nubi e ad un'esatta valutazione dell'importanza capitale che in tutti i fenomeni meteorologici accompagnati da precipitazioni fra il calore di condensazione che fino allora non si era considerato e ancora adesso troppo spesso si trascura, per esempio nelle teorie sulla formazione della grandine. Applicate ai fenomeni temporaleschi, le sue considerazioni termodinamiche lo inducono a sostenere e a dimostrare la possibilità tanto combattuta dell'esistenza di masse d'aria soprasature di vapor d'acqua e di ricondurre la spiegazione di molti fenomeni nei temporali, perfino delle varie forme delle nubi, alle conseguenze di condensazioni rapide, talvolta istantanee del vapore acqueo contenuto in una data massa d'aria, delle quali Egli dimostra la possibilità e la probabilità, e ad affermare doversi ricercare l'origine prima dei temporali di calore nelle correnti ascendenti prodotte da un equilibrio instabile delle masse d'aria per azioni locali.

La grande conoscenza da Lui posseduta della Meteorologia statistica che aveva coltivato da principio e della Meteorologia teorica che stava trasformando allora, gli permette di portare un notevole contributo alla teoria dei cicloni; avendo una chiara percezione del valore che i risultati ottenuti fino allora dal metodo statistico e dalla teoria, Egli si pone nel giusto mezzo fra quelli che riconducono i cicloni ai movimenti generali dell'atmosfera e quelli che non vedono in essi che fenomeni dipendenti da condizioni puramente locali; riassumendo imparzialmente i punti principali della discussione, dimostra che le teorie, che riconoscono solo nelle differenze di temperatura la causa delle differenze di pressione, non danno la spiegazione di tutti i fatti osservati e che bisogna completarle tenendo conto anche della dinamica dell'atmosfera cioè dei processi che si compiono, sia pure localmente, sotto l'influenza degli scambi d'aria provocati dalla circolazione generale dell'atmosfera.

Di tutti questi movimenti dell' aria Egli cercò prima di determinare gli elementi in modo rigoroso, per esempio da Lui partì la prima idea di un vero e proprio misuratore della pressione del vento all' Osservatorio di Potsdam, poi di costruirsi un modello sperimentale osservando i movimenti di un liquido col mezzo delle figure di diffusione di goccie di sostanze coloranti. Che più? il Bezold sembra volesse trasformare la Meteorologia non solo di statistica in scienza d' osservazione razionale, ma perfino in scienza sperimentale insegnando così non doversi mai la teoria allontanare troppo dai risultati dell'osservazione e dell'esperienza.

Degli altri numerosi lavori da Lui pubblicati ricorderemo ancora una serie notevole di studi sui fenomeni del magnetismo terrestre nei quali, parte teoricamente parte col metodo statistico puro, dimostra l'importanza dell' indagare se le forze magnetiche terrestri hanno un potenziale, e dello studiare la distribuzione del magnetismo terrestre, le anomalie di questa e le relazioni che debbono intercedere fra le variazioni degli elementi magnetici e i fenomeni elettrici che avvengono nell'atmosfera. Altro lavoro importante è quello sullo scambio di calore fra suolo ed aria in cui propone e si fa iniziatore di un sistema razionale di misure della temperatura del suolo per arrivare alla conoscenza delle quantità di calore che si scambiano fra suolo ed aria nelle varie regioni della terra e nelle varie stagioni, elementi importantissimi non solo dal punto di vista climatologico, ma anche dal punto di vista teorico per lo studio dei movimenti generali dell' atmosfera. Insomma in tutti i campi della Meteorologia Egli portò il grande contributo non solo del proprio lavoro personale diretto, ma anche dei consigli e delle proposte sull'organizzazione delle osservazioni onde da esse potessero trarsi i massimi frutti. Fra i suoi meriti principali in questo campo basterà ricordare le sue proposte: di osservazione sistematica dei fenomeni temporaleschi, dell'esplorazione meteorologica dell'alta atmosfera, delle determinazioni di temperatura e capacità termica del suolo, delle misure degli elementi magnetici lungo un parallelo, dello studio dell' irraggiamento in stazioni opportunamente distribuite sulla superficie terrestre ed infine del confronto rigoroso ed

uniforme di tutti gli strumenti di uso normale nelle stazioni meteorologiche affine di ottenerne risultati paragonabili fra loro.

Noi vediamo così come von Bezold nei suoi studi non abbia mai perduto di vista l'elemento pratico; Egli tentò sempre anche nei suoi più difficili lavori teorici di giungere al risultato colla minore esposizione di formole, aiutandosi sempre colla rappresentazione grafica, avendo sempre di mira la chiarezza, e l'applicazione immediata dello strumento dell' analisi matematica ai fenomeni e alle condizioni che ci circondano. Riesce ben difficile rendersi conto esatto di tutta la mole di lavoro prodotta da questa tempra eccezionale di lavoratore, perchè molti suoi studi, numerosissimi progetti si trovano appena accennati nelle sue pubblicazioni, ma i risultati da Lui ottenuti, l'impronta lasciata e l'indirizzo da Lui impresso agli studi meteorologici moderni sono di tal natura che ben a ragione si può dire non essersi Egli dedicato alla Meteorologia soltanto, ma aver creata e in gran parte formata Egli stesso una scienza nuova: La Fisica dell'Atmosfera.

A. Pochettino.

ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI FUNZIONALI ALLA FISICA-MATEMATICA.

del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

CAPITOLO III.

Teoremi sulle equazioni funzionali.

1. Richiamiamo anzitutto i risultati del sig. Fredholm, dei quali avremo a far uso in seguito.

Si consideri l'equazione funzionale:

$$(1) \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \int_{\theta} f(\alpha, \beta; \alpha' \beta') \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = \psi(\alpha', \beta'),$$

nella quale si suppone che $f(\alpha, \beta; \alpha' \beta')$ sia una nota funzione finita e continua delle quattro variabili $\alpha, \beta; \alpha', \beta'$, determinata per tutti i sistemi di valori di α, β, corrispondenti alle coordinate cartesiane dei punti di un certo campo piano θ a due dimensioni e per tutti i sistemi di valori di α', β', corrispondenti alle coordinate cartesiane dei punti del medesimo campo θ; che $\psi(\alpha', \beta')$ sia una funzione finita e continua del solito campo θ, data arbitrariamente, e $\varphi(\alpha, \beta)$ una funzione incognita dello stesso campo. La funzione $f(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ sarà detta *funzione caratteristica* [1], conforme alla denominazione introdotta dal prof. Pincherle.

Si scrivano le due equazioni funzionali omogenee:

$$(2) \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \int_{\theta} f(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = 0,$$

$$(3) \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \int_{\theta} f(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = 0,$$

1) Il *Kern* secondo l'Hilbert.

nella prima delle quali la funzione caratteristica è quella stessa che comparisce nella (1), nella seconda invece la funzione caratteristica è quella che si ottiene dalla funzione caratteristica della equazione (1) scambiando α con α' e β con β'. Diremo che le equazioni (2), (3) sono *coniugate* l'una dell'altra.

Intorno alle equazioni (1), (2), (3) si hanno i seguenti teoremi di Fredholm:

1° Se l'equazione omogenea (2) ammette n soluzioni linearmente indipendenti

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$$

queste saranno finite e continue in tutto il campo θ, e l'equazione coniugata (3) ammetterà anch'essa n soluzioni linearmente indipendenti

$$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$$

finite e continue in tutto il campo θ; e viceversa.

2° Se le equazioni (2), (3) non ammettono alcuna soluzione, l'equazione (1) ammetterà una soluzione ed una solamente, che sarà finita e continua in tutto il campo θ.

3° Se l'equazione (2) [o l'equazione (2)'] ammette n soluzioni linearmente indipendenti, la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (1) ammetta una soluzione finita e continua è che la funzione data $\psi(\alpha, \beta)$ soddisfi alle n equazioni:

$$\int_\theta \psi_1(\alpha, \beta).\psi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = 0\,, \quad \int_\theta \psi_2(\alpha, \beta).\psi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = 0\,, \dots$$

$$\dots \int_\theta \psi_n(\alpha, \beta).\psi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = 0\,.$$

4° I teoremi 1°, 2° e 3° sussistono ancora, se la funzione caratteristica per $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ diviene infinita come la funzione

$$\frac{1}{\{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2\}^t} \quad (t < 1)\,,$$

pur rimanendo finita e continua per tutti gli altri sistemi di valori delle variabili α, β; α', β'.

5° I teoremi 1°, 2°, 3° e 4° si estendono al caso dei sistemi di equazioni funzionali.

2. Supponiamo che la superficie chiusa σ soddisfi alle condizioni poste al § 8 del Capitolo precedente; e consideriamo su di essa un sistema ortogonale (α, β). Siano $p \equiv (x, y, z) \equiv (\alpha, \beta)$, $p' \equiv (x', y', z') \equiv (\alpha', \beta')$ due punti generici di σ, n ed n' le normali a σ in p e p'; e sia $r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$.

Si ha:

$$r' \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} = - \frac{(x - x') \cos \widehat{nx} + (y - y') \cos \widehat{ny} + (z - z') \cos \widehat{nz}}{r'^2} =$$

$$= - \frac{\Sigma (x - x') (\cos \widehat{nx} - \cos \widehat{n'x}) + \Sigma (x - x') \cos \widehat{n'x}}{r'^2} =$$

$$= - \frac{\Sigma (x - x') (\cos \widehat{nx} - \cos \widehat{n'x})}{r'^2} - r' \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} ;$$

ed ancora, in virtù delle condizioni poste per la superficie σ (§ 8 del Cap. prec.),

$$\frac{|\Sigma (x - x') (\cos \widehat{nx} - \cos \widehat{n'x})|}{r'^2} \leq \frac{\left|\operatorname{sen} \frac{\widehat{nn'}}{2}\right|}{\frac{r'}{2}} \Big\{ |\cos \widehat{r'x}| +$$

$$+ |\cos \widehat{r'y}| + |\cos \widehat{r'z}| \Big\} < 3\alpha .$$

Applicando la *regola di l' Hopital* e rammentando che $\Sigma dx . \cos \widehat{nx} = 0$, si ha poi:

$$\lim_{p=p'} r' \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} = \lim_{p=p'} \frac{\Sigma (x - x') \cos \widehat{n'x}}{r'^2} =$$

$$= \lim_{p=p'} \frac{\Sigma dx . \cos \widehat{n'x}}{2 \Sigma (x - x') dx} = \lim_{p=p'} \frac{\Sigma dx \frac{\cos \widehat{n'x} - \cos \widehat{nx}}{r'}}{2 \Sigma \frac{x - x'}{r'} dx} .$$

Dalla quale formola risulta che l'espressione $\frac{\Sigma(x-x')\cos\widehat{n'x}}{r'^2}$ si mantiene sempre inferiore ad una quantità finita, che si può fissare. Riepilogando, possiamo concludere che [1]) *le espressioni* $\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}$, $\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n'}$ *si mantengono sempre finite e continue e solo* per $p=p'$, cioè *per* $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ *divengono infinite* come la funzione $\frac{1}{r'}$, e quindi ancora *come la funzione*

$$\frac{1}{\{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2\}^{1/2}}.$$

Risoluzione del problema interno di Dirichlet.

3. Sia $u(\alpha,\beta)$ una funzione finita e continua data arbitrariamente sulla superficie σ. Posto:

$$d\sigma=\sqrt{EG}\,d\alpha\,d\beta\,,$$

dove E, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale della superficie σ; indicati con E', G' i valori di questi coefficienti nel punto p'; e supposto ora e nel seguito che il

1) Se le coordinate x, y, z dei punti di σ hanno le derivate dei due primi ordini rispettto alle variabili α, β, si può trovare il significato geometrico del $\lim_{p=p'} r'\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}$. Infatti, applicando la regola di l'Hopital e rammentando che $\Sigma\, dx.\cos\widehat{nx}=0$, si può scrivere:

$$\lim_{p=p'} r'\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}=-\frac{1}{2}\lim_{p=p'}\frac{(x-x')\,d(\cos\widehat{nx})+(y-y')\,d(\cos\widehat{ny})+(z-z')\,d(\cos\widehat{nz})}{(x-x')\,dx+(y-y')\,dy+(z-z')\,dz}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{p=p'}\frac{\Sigma\, dx.d(\cos\widehat{nx})}{\Sigma\, dx^2}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Sigma\, dx.d(\cos\widehat{nx})}{\Sigma\, dx^2}\right\}_{p'},$$

nella quale formola la notazione $\{\ldots\}_{p'}$ serve ad indicare il valore nel punto p' dell'espressione tra parentesi. Questa espressione, rappresenta la 1.a curvatura nel punto p' della sezione normale tangente alla direzione secondo cui il punto p si avvicina a p' (Cfr. ad es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale;* Cap. IV, n. 53; ediz. del 1894).

campo θ di variabilità delle α e β sia quello corrispondente ai punti di tutta la superficie σ, si faccia nelle equazioni (1), (2):

$$\psi(\alpha', \beta') = u(\alpha', \beta'),$$

$$f(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \frac{1}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \sqrt{\mathrm{E\,G}};$$

sarà allora:

$$f(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'} \sqrt{\mathrm{E'G'}};$$

e quindi le equazioni (1), (2) diverranno:

$$(1)' \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = u(\alpha', \beta'),$$

$$(2)' \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0,$$

la (3) diverrà:

$$\varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'} \sqrt{\mathrm{E'G'}} \cdot \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\sqrt{\mathrm{E\,G}}}\, d\sigma = 0,$$

ossia, dividendo per $\sqrt{\mathrm{E'G'}}$ e ponendo $\varphi_1(\alpha, \beta) = \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\sqrt{\mathrm{E\,G}}}$,

$$(3)' \qquad \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0.$$

4. Dimostriamo che l'*equazione* (3)' *non ammette soluzione alcuna*. Infatti, indicata con $\varphi_1(\alpha, \beta)$ una soluzione dell'equazione (3)', si consideri lo strato:

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma.$$

In virtù della continuità della $\varphi_1(\alpha, \beta)$ [Cfr. il teorema 1° al § 1] e in virtù delle formole (21), (21)' al Capitolo precedente, si ha, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo S,

$$(4) \qquad \overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} = \lim_{P=p'} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n'} = -\varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma ,$$

supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo infinito S',

$$(4)' \qquad \overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = \lim_{P=p'} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n'} = \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma .$$

Avuto poi riguardo alla (3)', risulta $\overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = 0$ qualunque sia il punto $p' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ; quindi si avrà in tutto il campo S' : $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$; e poichè lo strato $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ è una funzione continua in tutti i punti dello spazio, risulterà ancora nel campo finito S : $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Sarà dunque: $\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} = 0$ qualunque sia il punto $p' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ; e per conseguenza, sottraendo membro a membro le (4), (4)', si avrà:

$$0 = \overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} - \overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = -2\,\varphi_1(\alpha', \beta'),$$

ossia si avrà $\varphi_1(\alpha, \beta) = 0$ in tutti i punti di σ, come si voleva dimostrare.

5. In conseguenza del risultato precedente e in virtù del teorema 1° al § 1, l'equazione (2)' non ammetterà soluzione alcuna; ed allora, per il teorema 2° al § 1, l'equazione (1)' ammetterà una soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$ ed una solamente, che sarà finita e continua su tutta la superficie σ.

Si costruisca con questa soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$ il doppio strato:

(5)
$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma \ .$$

In virtù della continuità della $\varphi(\alpha, \beta)$, della formola (8) al Capitolo precedente e dell' equazione (1)', si ha, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo finito S,

$$\lim_{P=p'} \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = u(\alpha', \beta') \,.$$

Adunque *la funzione* $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ *è armonica nel campo finito* S *e nei punti di* σ *coincide con la funzione arbitrariamente data* $u(\alpha, \beta)$; essa quindi risolve il ***problema interno di Dirichlet.***

Risoluzione del problema esterno di Dirichlet.

6. Sia $u(\alpha, \beta)$ una funzione finita e continua data arbitramente sulla superficie σ. Si faccia nelle equazioni (1), (2):

$$\psi(\alpha', \beta') = u(\alpha', \beta') \,,$$

$$f(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = -\frac{1}{2\pi} \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \sqrt{\mathrm{E\,G}} \,;$$

sarà allora:

$$f(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} \sqrt{\mathrm{E'\,G'}} \,;$$

e quindi, come al § 3, le equazioni (1), (2), (3) diverranno rispettivamente:

(1)"
$$\varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = u(\alpha', \beta') \ ,$$

$$(2)' \qquad \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\ ,$$

$$(3)' \qquad \varphi_1(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\ .$$

Osserviamo che l'equazione $(2)'$ ammette la soluzione $\varphi(\alpha, \beta) = C$ (costante); infatti dalla prima delle $(6)'$ al Capitolo precedente si ha:

$$1 - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn}\, d\sigma = 0\ .$$

Per conseguenza, in forza del teorema 1° al § 1, si ha che l'*equazione* $(3)'$ *ammette almeno una soluzione.*

7. Ora vogliamo dimostrare che l'*equazione* $(3)'$ *ammette soltanto la soluzione testè segnalata*, ossia se $\varphi_1(\alpha, \beta)$ è la soluzione (diversa da zero) dell'equazione $(3)'$, della quale si è dimostrata l'esistenza, qualunque altra soluzione $\varphi_2(\alpha, \beta)$ della medesima equazione $(3)'$ differisce dalla $\varphi_1(\alpha, \beta)$ per un fattore costante.

Infatti, posto:

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma\ ,$$

risulta dalle formole (21), $(21)'$ al Capitolo precedente, se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ varia nel campo infinito S',

$$(6) \qquad \overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = \lim_{P=p'} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n'} = \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma\ ,$$

se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ varia nel campo finito S e si ha riguardo all'equazione (3)',

$$(6)' \quad \frac{\overline{d\Phi_1}}{dn'} = \lim_{P=p'} \frac{\delta\Phi_1}{\delta n'} = -\varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 .$$

Quest'ultima ci dà nel campo S : $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = C_1$ (costante); e poichè la funzione $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ è continua in tutto lo spazio, si ha che essa, considerata nel campo infinito S', è tale che nei punti di σ prende il valore costante C_1.

Osserviamo che *la costante* C_1 *non può essere uguale a zero*. Infatti se fosse $C_1 = 0$, si avrebbe nei punti di σ: $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$; e poichè la $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ nei punti all'infinito dello spazio si annulla, avremmo $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$ in tutto lo spazio ; e quindi : $\frac{\overline{d\Phi_1}}{dn'} = 0$. Allora risulterebbe dalle (6), (6)' :

$$\frac{\overline{\overline{d\Phi_1}}}{dn'} - \frac{\overline{d\Phi_1}}{dn'} = 2\varphi_1(\alpha', \beta') = 0 ,$$

cioè si dovrebbe avere su tutta la superficie σ:

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = 0 ,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Nello stesso modo, posto :

$$\Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_2(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma ,$$

risulterà che la funzione $\Phi_2(\xi, \eta, \zeta)$, considerata nel campo S' è tale che nei punti di σ prende un certo valore costante C_2, che dovrà essere diverso da zero.

Ciò premesso, si determini la costante h in modo che sia:

$$h\, C_1 - C_2 = 0 ,$$

e si ponga :

$$\varphi_3(\alpha, \beta) = h\, \varphi_1(\alpha, \beta) - \varphi_2(\alpha, \beta) .$$

Evidentemente la $\phi_3(\alpha, \beta)$ sarà una soluzione dell'equazione (3)', e si avrà:

$$\Phi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\phi_3(\alpha, \beta)}{r} d\sigma = \frac{h}{2\pi}\int_\sigma \frac{\phi_1(\alpha, \beta)}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\phi_2(\alpha, \beta)}{r} d\sigma =$$

$$= h\,\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) - \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) \ ;$$

allora avremo nei punti di σ:

$$\Phi_3(\xi, \eta, \zeta) = C_3 = h\,C_1 - C_2 = 0 \ ;$$

e quindi essendo nulla la costante C_3, dovremo avere su tutta la superficie σ:

$$\phi_3(\alpha, \beta) = 0 \ ,$$

ossia:

$$\phi_2(\alpha, \beta) = h\,\phi_1(\alpha, \beta) \ ,$$

come si voleva dimostrare.

8. Dal momento che l'equazione (3)' ammette l'unica soluzione $\phi_1(\alpha, \beta)$, ossia che la equazione (3) ad essa equivalente ammette l'unica soluzione $\psi_1(\alpha, \beta) = \phi_1(\alpha, \beta)\sqrt{EG}$, si avrà, in virtù del teorema 3° al § 1, che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (1)' ammetta una soluzione è che per la funzione $u(\alpha, \beta)$ si abbia:

$$(7) \qquad \int_\theta \psi_1(\alpha, \beta) . u(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int_\sigma \phi_1(\alpha, \beta) . u(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \ .$$

Supponiamo dapprima che la funzione $u(\alpha, \beta)$, data al § 6, soddisfi alla precedente condizione ed indichiamo con $\phi(\alpha, \beta)$ la soluzione, che allora esisterà certamente, dall'equazione (1)'. Posto:

$$(8) \qquad \Phi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \phi(\alpha, \beta)\, d\sigma \ ,$$

si avrà, dalla formola (9) al Capitolo precedente e dall' equazione (1)', se il punto P varia nel campo infinito S',

$$\lim_{P=p'} \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = u(\alpha', \beta') .$$

Adunque *la funzione* $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ *è armonica nel campo infinito* S' *e nei punti di* σ *coincide con la funzione arbitrariamente data* $u(\alpha, \beta)$; essa quindi risolve il *problema esterno di Dirichlet*, quando la $u(\alpha, \beta)$ verifica la condizione (7).

Se la funzione $u(\alpha, \beta)$ non soddisfa alla condizione (7), si consideri la funzione $\frac{1}{r_1}$, dove r_1 è il vettore che parte da un punto fisso qualsiasi dell' interno di S e va al punto variabile $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ del campo infinito S' (i punti di σ inclusi); e si determini una costante h_1 in modo che sia:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\left\{u(\alpha, \beta) + \frac{h_1}{r_1}\right\}d\sigma = 0 .$$

Ciò è sempre possibile, perchè l' *integrale:*

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\frac{d\sigma}{r_1}$$

è certamente diverso da zero. Infatti, ammesso che sia uguale a zero, ne segue che la funzione $\frac{1}{r_1}$ soddisfa nei punti (ξ, η, ζ) di σ alla condizione (7), e quindi la funzione armonica nel campo S', la quale nei punti di σ coincide con la funzione $\frac{1}{r_1}$, cioè la funzione armonica $\frac{1}{r_1}$ stessa deve potersi rappresentare mediante la formula (8), ossia deve potersi rappresentare mediante un doppio strato; e questo è impossibile, perchè nei punti all' infinito di S' un doppio strato si comporta come $\frac{1}{r_1^2}$.

In virtù della continuità della $\varphi_1(\alpha, \beta)$ [Cfr. il teorema 1° al § 1] e in virtù delle formole (21), (21)' al Capitolo precedente, si ha, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo S,

$$(4) \qquad \overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} = \lim_{P=p'} \frac{\delta\Phi_1}{\delta n'} = -\varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma ,$$

supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo infinito S',

$$(4)' \qquad \overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = \lim_{P=p'} \frac{\delta\Phi_1}{\delta n'} = \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma .$$

Avuto poi riguardo alla (3)', risulta $\overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = 0$ qualunque sia il punto $p' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ; quindi si avrà in tutto il campo S' : $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$; e poichè lo strato $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ è una funzione continua in tutti i punti dello spazio, risulterà ancora nel campo finito S : $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Sarà dunque : $\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} = 0$ qualunque sia il punto $p' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ; e per conseguenza, sottraendo membro a membro le (4), (4)', si avrà :

$$0 = \overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} - \overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = -2\varphi_1(\alpha', \beta'),$$

ossia si avrà $\varphi_1(\alpha, \beta) = 0$ in tutti i punti di σ, come si voleva dimostrare.

5. In conseguenza del risultato precedente e in virtù del teorema 1° al § 1, l'equazione (2)' non ammetterà soluzione alcuna; ed allora, per il teorema 2° al § 1, l'equazione (1)' ammetterà una soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$ ed una solamente, che sarà finita e continua su tutta la superficie σ.

Si costruisca con questa soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$ il doppio strato:

(5) $$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \varphi(\alpha, \beta) d\sigma .$$

In virtù della continuità della $\varphi(\alpha, \beta)$, della formola (8) al Capitolo precedente e dell' equazione (1)', si ha, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo finito S,

$$\lim_{P=p'} \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta) d\sigma = u(\alpha', \beta') .$$

Adunque *la funzione $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ è armonica nel campo finito S e nei punti di σ coincide con la funzione arbitrariamente data $u(\alpha, \beta)$*; essa quindi risolve il *problema interno di Dirichlet.*

Risoluzione del problema esterno di Dirichlet.

6. Sia $u(\alpha, \beta)$ una funzione finita e continua data arbitramente sulla superficie σ. Si faccia nelle equazioni (1), (2):

$$\psi(\alpha', \beta') = u(\alpha', \beta') ,$$

$$f(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \sqrt{EG} ;$$

sarà allora:

$$f(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta\frac{1}{r'}}{\delta n'} \sqrt{E'G'} ;$$

e quindi, come al § 3, le equazioni (1), (2), (3) diverranno rispettivamente:

(1)'' $$\varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta) d\sigma = u(\alpha', \beta') ,$$

$$(2)^{*} \qquad \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 ,$$

$$(3)^{*} \qquad \varphi_1(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \frac{\delta\frac{1}{r'}}{\delta n'}\varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 .$$

Osserviamo che l'equazione $(2)^{*}$ ammette la soluzione $\varphi(\alpha, \beta) = C$ (costante); infatti dalla prima delle $(6)^{*}$ al Capitolo precedente si ha:

$$1 - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\, d\sigma = 0 .$$

Per conseguenza, in forza del teorema 1° al § 1, si ha che *l'equazione* $(3)^{*}$ *ammette almeno una soluzione.*

7. Ora vogliamo dimostrare che *l'equazione* $(3)^{*}$ *ammette soltanto la soluzione testè segnalata*, ossia se $\varphi_1(\alpha, \beta)$ è la soluzione (diversa da zero) dell'equazione $(3)^{*}$, della quale si è dimostrata l'esistenza, qualunque altra soluzione $\varphi_2(\alpha, \beta)$ della medesima equazione $(3)^{*}$ differisce dalla $\varphi_1(\alpha, \beta)$ per un fattore costante.

Infatti, posto:

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma ,$$

risulta dalle formole (21), (21)' al Capitolo precedente, se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ varia nel campo infinito S',

$$(6) \qquad \frac{\overline{\overline{d\Phi_1}}}{dn'} = \lim_{P=p'} \frac{\delta\Phi_1}{\delta n'} = \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \frac{\delta\frac{1}{r'}}{\delta n'}\varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma ,$$

se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ varia nel campo finito S e si ha riguardo all'equazione (3)'',

$$(6)' \quad \overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} = \lim_{P=p'} \frac{\delta \Phi_1}{\delta n'} = -\varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta n'} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 .$$

Quest'ultima ci dà nel campo S : $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = C_1$ (costante); e poichè la funzione $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ è continua in tutto lo spazio, si ha che essa, considerata nel campo infinito S', è tale che nei punti di σ prende il valore costante C_1.

Osserviamo che *la costante* C_1 *non può essere uguale a zero.* Infatti se fosse $C_1 = 0$, si avrebbe nei punti di σ: $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$; e poichè la $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ nei punti all'infinito dello spazio si annulla, avremmo $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$ in tutto lo spazio; e quindi : $\overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} = 0$. Allora risulterebbe dalle (6), (6)' :

$$\overline{\overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}}} - \overline{\frac{d\Phi_1}{dn'}} = 2\varphi_1(\alpha', \beta') = 0 ,$$

cioè si dovrebbe avere su tutta la superficie σ:

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = 0 ,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Nello stesso modo, posto :

$$\Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_2(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma ,$$

risulterà che la funzione $\Phi_2(\xi, \eta, \zeta)$, considerata nel campo S' è tale che nei punti di σ prende un certo valore costante C_2, che dovrà essere diverso da zero.

Ciò premesso, si determini la costante h in modo che sia:

$$h\, C_1 - C_2 = 0 ,$$

e si ponga :

$$\varphi_3(\alpha, \beta) = h\, \varphi_1(\alpha, \beta) - \varphi_2(\alpha, \beta) .$$

Evidentemente la $\varphi_3(\alpha, \beta)$ sarà una soluzione dell'equazione (3)*, e si avrà:

$$\Phi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_3(\alpha,\beta)}{r}\, d\sigma = \frac{h}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha,\beta)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_2(\alpha,\beta)}{r}\, d\sigma =$$

$$= h\,\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) - \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) \;;$$

allora avremo nei punti di σ:

$$\Phi_3(\xi, \eta, \zeta) = C_3 = h\,C_1 - C_2 = 0\;;$$

e quindi essendo nulla la costante C_3, dovremo avere su tutta la superficie σ:

$$\varphi_3(\alpha, \beta) = 0\,,$$

ossia:

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = h\,\varphi_1(\alpha, \beta)\,,$$

come si voleva dimostrare.

8. Dal momento che l'equazione (3)* ammette l'unica soluzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$, ossia che la equazione (3) ad essa equivalente ammette l'unica soluzione $\psi_1(\alpha, \beta) = \varphi_1(\alpha, \beta)\sqrt{EG}$, si avrà, in virtù del teorema 3° al § 1, che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (1)* ammetta una soluzione è che per la funzione $u(\alpha, \beta)$ si abbia:

$$(7) \qquad \int_\theta \psi_1(\alpha, \beta).u(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta).u(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,.$$

Supponiamo dapprima che la funzione $u(\alpha, \beta)$, data al § 6, soddisfi alla precedente condizione ed indichiamo con $\varphi(\alpha, \beta)$ la soluzione, che allora esisterà certamente, dall'equazione (1)*. Posto:

$$(8) \qquad \Phi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\,\frac{1}{r}}{dn}\,\varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma\,,$$

si avrà, dalla formola (9) al Capitolo precedente e dall' equazione (1)', se il punto P varia nel campo infinito S',

$$\lim_{P=p'} \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = u(\alpha', \beta') .$$

Adunque *la funzione* $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ *è armonica nel campo infinito* S' *e nei punti di* σ *coincide con la funzione arbitrariamente data* $u(\alpha, \beta)$; essa quindi risolve il *problema esterno di Dirichlet*, quando la $u(\alpha, \beta)$ verifica la condizione (7).

Se la funzione $u(\alpha, \beta)$ non soddisfa alla condizione (7), si consideri la funzione $\frac{1}{r_1}$, dove r_1 è il vettore che parte da un punto fisso qualsiasi dell' interno di S e va al punto variabile $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ del campo infinito S' (i punti di σ inclusi); e si determini una costante h_1 in modo che sia:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta) \left\{ u(\alpha, \beta) + \frac{h_1}{r_1} \right\} d\sigma = 0 .$$

Ciò è sempre possibile, perchè l' *integrale*:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta) \frac{d\sigma}{r_1}$$

è certamente diverso da zero. Infatti, ammesso che sia uguale a zero, ne segue che la funzione $\frac{1}{r_1}$ soddisfa nei punti (ξ, η, ζ) di σ alla condizione (7), e quindi la funzione armonica nel campo S', la quale nei punti di σ coincide con la funzione $\frac{1}{r_1}$, cioè la funzione armonica $\frac{1}{r_1}$ stessa deve potersi rappresentare mediante la formula (8), ossia deve potersi rappresentare mediante un doppio strato; e questo è impossibile, perchè nei punti all' infinito di S' un doppio strato si comporta come $\frac{1}{r_1^2}$.

Determinata la costante h_1 nel modo anzidetto, si ponga nei punti di σ:

$$\overline{u}(\alpha, \beta) = u(\alpha, \beta) + \frac{h_1}{r_1} . \tag{9}$$

Sarà:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta) . \overline{u}(\alpha, \beta) \, d\sigma = 0 \; ;$$

ed allora, poichè la fuzione $\overline{u}(\alpha, \beta)$ soddisfa alla condizione (7), esisterà una soluzione dell'equazione funzionale:

$$\varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \overline{u}(\alpha', \beta') \; ; \tag{1)$^*_1$}$$

e quindi, posto:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r}}{dn} \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma \, , \tag{8)$_1$}$$

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = \Phi(\xi, \eta, \zeta) - \frac{h_1}{r_1} \, ,$$

si avrà, tenendo conto della (9), per $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo infinito S',

$$\lim_{P=p'} \Psi(\xi, \eta, \zeta) = \lim_{P=p'} \Phi(\xi, \eta, \zeta) - \frac{h_1}{r_1} = \varphi(\alpha', \beta') -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma - \frac{h_1}{r_1} = \overline{u}(\alpha', \beta') - \frac{h_1}{r_1} = u(\alpha', \beta') .$$

Adunque *la funzione* $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$ *a distanza infinita si annulla, è armonica nel campo infinito* S' *e nei punti di* σ *coincide con la funzione arbitrariamente data* $u(\alpha, \beta)$; essa quindi risolve il *problema esterno di Dirichlet,* quando la $u(\alpha, \beta)$ non soddisfa alla condizione (7).

Problema derivato interno di Dirichlet.

9. Sia data una funzione $\mu(\alpha, \beta)$ finita e continua su tutta la superficie σ, tale che si abbia:

$$\int_\sigma \mu(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \ . \tag{10}$$

Questa condizione è necessaria, se si vuole che la funzione $\mu(\alpha, \beta)$ possa rappresentare i valori della derivata normale nei punti di σ di una funzione armonica nei punti del campo finito S.

Si faccia nelle equazioni (1), (2):

$$f(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} \sqrt{\mathrm{EG}} ,$$

$$\psi(\alpha', \beta') = \mu(\alpha', \beta') \ ;$$

sarà allora:

$$f(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \sqrt{\mathrm{E'G'}} \ ;$$

e quindi le equazioni (1),(2), (3) diverranno rispettivamente:

$$\varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \mu(\alpha', \beta') \ , \tag{1)''$$

$$\varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\delta \frac{1}{r'}}{\delta n'} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \ , \tag{2)''$$

$$\varphi_1(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{d \frac{1}{r'}}{dn} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \ . \tag{3)''$$

Le equazioni (2)'', (3)'' coincidono rispettivamente con le equazioni (3)', (2)' del § 6; per cui esse ammettono ciascuna

una soluzione ed una solamente (§ 7). In particolare l'equazione $(3)'''$ ammette (Cfr. § 6) l'unica soluzione $\Phi_1(\alpha, \beta) = C$ (costante); sicchè, in forza del teorema 3° al § 1, la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $(1)'''$ ammetta una soluzione è che la funzione data $\mu(\alpha, \beta)$ verifichi la condizione:

$$\int_\sigma C.\mu(\alpha, \beta)\, d\sigma = C \int_\sigma \mu(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \ .$$

Ora la (10) ci dice appunto che questa condizione è verificata; quindi l'equazione $(1)'''$ ammette una soluzione finita e continua $\varphi(\alpha, \beta)$.

Formiamo con questa $\varphi(\alpha, \beta)$ la funzione:

$$U(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma + c$$

con c costante arbitraria. In virtù della continuità della $\varphi(\alpha, \beta)$, risulta dalla (21) del Capitolo precedente e dalla $(1)'''$, se il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ varia nel campo finito S,

$$\overline{\frac{dU}{dn'}} = \lim_{P=p'} \frac{\partial U}{\partial n'} = \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \mu(\alpha' \beta') \ .$$

Adunque *la funzione* $U(\xi, \eta, \zeta)$, *che contiene una costante arbitraria additiva, è armonica nel campo finito* S, *e i valori della sua derivata normale nei punti di* σ *coincidono con la funzione data* $\mu(\alpha, \beta)$; essa quindi risolve il *problema derivato interno di Dirichlet.*

Problema derivato esterno di Dirichlet.

10. Sia data ad arbitrio una funzione $\mu(\alpha, \beta)$ finita e continua su tutta la superficie σ. Si faccia nelle equazioni (1), (2):

$$f(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} \sqrt{EG} \ ,$$

$$\psi(\alpha', \beta') = \mu(\alpha', \beta') \ ;$$

sarà allora:

$$f(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \sqrt{E'G'} \;;$$

e quindi le equazioni (1), (2), (3) diverranno rispettivamente:

$$(1)''' \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \mu(\alpha', \beta') \;,$$

$$(2)''' \qquad \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \;,$$

$$(3)''' \qquad \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \;.$$

Le equazioni (2)''', (3)''' coincidono rispettivamente con le equazioni (3)', (2)' del § 3; e queste, come fu dimostrato al § 4, non ammettono soluzione alcuna; per conseguenza, in virtù del teorema 2° al § 1, l'equazione funzionale (1)''' ammette una soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$ finita e continua su tutta la superficie σ, ed una solamente. Ciò premesso, si consideri lo strato semplice:

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma \;.$$

In virtù della continuità della $\varphi(\alpha, \beta)$, supposto il punto P variabile nel campo infinito S', risulta dalla formola (21)' del Capitolo precedente e dalla (1)''':

$$\overline{\overline{\frac{dU}{dn'}}} = \lim_{P=p'} \frac{\partial U}{\partial n'} = \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial n'} \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \mu(\alpha', \beta') \;.$$

Adunque *la funzione* $U(\xi, \eta, \zeta)$ *a distanza infinita si annulla, è armonica nel campo infinito* S', *e i valori della sua derivata normale nei punti di* σ *(nella direzione che esce da* S'*) coincidono con la funzione data* $\mu(\alpha, \beta)$; essa quindi risolve il *problema derivato esterno di Dirichlet.*

Teoremi sulle funzioni armoniche.

11. Indichiamo con r_1 i raggi vettori che partono da un punto fisso qualsiasi, p. es. dall'origine degli assi, e dimostriamo anzitutto che *una funzione* V *armonica nel campo infinito* S', *la quale ammette la derivata normale* $\frac{dV}{dn}$ *nei punti di* σ *e di cui le derivate del primo ordine si comportano all'infinito come la funzione* $\frac{1}{r_1^{2+\alpha}}$ *con* $\alpha > 0$, *soddisfa alla condizione:*

$$\int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma = 0 \ . \tag{11}$$

Infatti si consideri una sfera col centro nell'origine degli assi e con raggio talmente grande che contenga nel suo interno tutta la superficie σ; e si indichi con σ_1 la superficie di questa sfera, con S_1 lo spazio finito limitato da σ e da σ_1. La funzione V è armonica nel campo finito S_1; per cui, se indichiamo con n_1 la normale nei punti di σ_1 nella direzione che si allontana da S_1, si dovrà avere:

$$\int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma + \int_{\sigma_1} \frac{dV}{dn_1} d\sigma_1 = 0 \ .$$

Ora, lasciando fermo il centro della sfera, facendo crescere indefinitamente il suo raggio r_1, e ponendo mente al fatto che la $\frac{dV}{dn_1}$ all'infinito si comporta come $\frac{1}{r_1^{2+\alpha}}$, si avrà:

$$\lim_{r_1=\infty} \int_{\sigma_1} \frac{dV}{dn_1} d\sigma_1 = 0 ;$$

risulterà quindi la formola (11), che si voleva dimostrare.

12. Dimostriamo ora che *una funzione armonica nel campo infinito* S', *la quale nei punti di* σ *prende un valore costante e all'infinito si annulla, può sempre esprimersi*

mediante uno strato semplice, mentre non può mai esprimersi mediante un doppio strato.

Dimostriamo in primo luogo che una tale funzione armonica si può sempre esprimere mediante uno strato semplice. Infatti riprendiamo la funzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$ del § 7, soluzione dell'equazione omogenea $(3)^*$, e rammentiamo (§ 7) che, posto:

$$\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma$$

e considerata la $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ nel campo infinito S', si ha nei punti di $\sigma : \Phi_1(\xi, \eta, \zeta) = C_1$, con C_1 costante diversa da zero. Data allora una costante qualsiasi H, si consideri lo strato.

$$\Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{H}{C_1}\frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma = \frac{H}{C_1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha,\beta)}{r}\, d\sigma = \frac{H}{C_1}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\,.$$

In virtù della rammentata proprietà della funzione $\Phi_1(\xi,\eta,\zeta)$, se si considera la $\Phi_2(\xi, \eta, \zeta)$ nei punti del campo infinito S' si avrà nei punti di $\sigma : \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) = H$. Rimane così dimostrata la prima parte del teorema enunciato.

Supponiamo ora che una funzione armonica nel campo S', la quale ha un valore costante H nei punti di σ, possa rappresentarsi mediante un doppio strato, che indicheremo con W. Per quanto si è dimostrato precedentemente, questa funzione armonica deve potersi esprimere mediante lo strato semplice $\Phi_2(\xi, \eta, \zeta)$ di densità $\frac{H}{C_1}\varphi_1(\alpha, \beta)$; e poichè questa densità è finita e continua, si ha che la $\Phi_2(\xi, \eta, \zeta)$ ammette certamente le derivate normali nei punti di σ. Allora anche il doppio strato W deve ammettere le derivate normali nei punti di σ, se si considera come funzione dei punti del campo infinito S'. Ora le derivate prime del doppio strato W nei punti all'infinito si comportano come $\frac{1}{r^3}$; sicchè, in virtù del teorema del § precedente, varrà per esso la (11), e varrà ancora la seguente formola di integrazione per parti:

$$0 = \int_{S'} W.\Delta^2 W dS = -\int_{S'} \Delta W d S' + \int_\sigma W \frac{dW}{dn}\, d\sigma\ ;$$

e poichè:

$$\int_\sigma W\frac{dW}{dn}\,d\sigma = H\int_\sigma \frac{dW}{dn}\,d\sigma = 0 ,$$

risulterà ancora:

$$\int_{S'} \Delta W\, dS' = 0 .$$

Di qui risulta che le derivate prime di W sono nulle in tutto S'; e poichè la W si annulla all'infinito, sarà in tutto il campo S': $W(\xi, \eta, \zeta) = 0$; e per conseguenza dovrà essere $H = 0$. Rimane così dimostrata anche la seconda parte del teorema enunciato.

Dal fatto che una funzione armonica nel campo infinito S', che ha un valore costante nei punti di σ, non può rappresentarsi mediante un doppio strato, segue che una costante qualsiasi non può mai soddisfare alla condizione (7), ossia segue:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta) \,.\, H\, d\sigma = H\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma \gtrless 0 .$$

qualunque sia la costante H. Abbiamo dunque che *l'integrale esteso a tutta la superficie σ della soluzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$ dell' equazione funzionale* (3)* *è diverso dallo zero.*

Problema fondamentale dell'elettrostatica.

13. Il problema fondamentale dell' elettrostatica si può enunciare nel seguente modo: *data una costante qualsiasi* M *(massa elettrica) determinare una funzione $\psi(\alpha, \beta)$ (densità elettrica) dei punti di σ, tale che sia:*

$$\int_\sigma \psi(\alpha, \beta)\, d\sigma = M$$

e tale ancora che lo strato semplice:

$$\int_\sigma \frac{\psi(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma$$

abbia nei punti di σ un valore costante.

Per risolvere questo problema, cominciamo dal porre:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = K .$$

Poichè, come si dimostrò al § precedente, la costante K è diversa da zero, si può scrivere:

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{M}{K} \varphi_1(\alpha, \beta) , \tag{12}$$

e la funzione $\psi(\alpha, \beta)$, così determinata, sarà finita e continua su tutta la superficie σ e soddisferà alla condizione:

$$\int_\sigma \psi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \frac{M}{K}\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = M .$$

Sarà poi:

$$\int_\sigma \frac{\psi(\alpha, \beta)}{r} d\sigma = \frac{M}{K}\int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r} d\sigma = 2\pi \frac{M}{K} \Phi_1(\xi, \eta, \zeta) ;$$

e quindi si avrà nei punti di σ:

$$\int_\sigma \frac{\psi(\alpha, \beta)}{r} d\sigma = 2\pi \frac{M}{K} C_1 = \text{costante} .$$

Adunque *la funzione* $\psi(\alpha, \beta)$, *data dalla formola* (12), *risolve completamente il problema fondamentale dell' elettrostatica.* In questo modo abbiamo ancora trovato il significato meccanico della soluzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$ dell'equazione funzionale (3)'.

Osserviamo ancora che l' unicità della soluzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$ dell'equazione (3)', dimostrata al § 7, ci dice che *la soluzione, testè trovata, del problema proposto è unica.*

Teoremi sugli strati e sui doppii strati.

14. *Si abbia il doppio strato:*

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \int_\sigma \rho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma ,$$

la cui densità sia una funzione finita e continua dei punti di σ, e supponiamo che esista la derivata normale di questo doppio strato da una faccia di σ, ossia, se si pone:

$$\frac{\overline{dW}}{dn'} = \lim_{P=p'} \frac{\delta W}{\delta n'}$$

per P variabile nel campo finito S, e se si pone:

$$\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'} = \lim_{P=p'} \frac{\delta W}{\delta n'}$$

per P variabile nel campo infinito S', supponiamo che esista $\frac{\overline{dW}}{dn'}\left(\text{oppure } \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'}\right)$ in tutti i punti p' di σ; *allora esisterà la derivata normale di* W *anche dall'altra faccia di σ,* ossia esisterà $\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'}\left(\text{oppure } \frac{\overline{dW}}{dn'}\right)$ in tutti i punti p' di σ; *e queste due derivate normali in ogni punto di σ assumeranno valori uguali.*

Per dimostrare questo teorema, si costruisca, come al § 10, uno strato V tale che la sua densità $\psi(\alpha, \beta)$ sia una funzione finita e continua dei punti di σ e tale ancora che, con le solite notazioni, si abbia in tutti i punti p' di questa superficie:

$$\frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'} = \frac{\overline{dW}}{dn'} . \tag{13}$$

Applicando le formole (21), (21)' del Capitolo precedente, si ha:

$$\frac{\overline{dV}}{dn'} - \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'} = -4\pi\, \psi(\alpha', \beta') ,$$

da cui si trae:

$$\frac{\overline{dW}}{dn'} = \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'} = 4\pi\, \psi(\alpha', \beta') + \frac{\overline{dV}}{dn'} ; \tag{14}$$

e questa, se si pone:

$$(15) \qquad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}(W - V) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\rho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{\psi}{r} \right) d\sigma ,$$

si può scrivere:

$$(16) \qquad \psi(\alpha', \beta') = \overline{\frac{d\Phi}{dn'}} .$$

Ora in virtù della nota *formola di Green* e della precedente formola, si può scrivere per $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo S:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{\psi}{r} \right) d\sigma ;$$

quindi, sottraendo membro a membro dalla (15), si avrà per $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo S:

$$\int_\sigma (\rho - \varphi) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 0 .$$

Di qui si ha, facendo uso della formola (8) al Capitolo precedente,

$$0 = \left\{ \rho(\alpha', \beta') - \varphi(\alpha', \beta') \right\} + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} (\rho - \varphi) d\sigma .$$

Questa formola ci dice che la funzione finita e continua dei punti di σ: $\rho - \varphi$ soddisfa all'equazione funzionale (2)' del § 3; e poichè, come fu dimostrato al § 5, questa equazione non ammette soluzione alcuna, necessariamente dovrà aversi sulla superficie σ:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, \beta) .$$

Si ha, in virtù della (16) e della precedente, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo infinito S',

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\phi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{\overline{d\phi}}{dn}\right)d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\rho\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{\psi}{r}\right)d\sigma\,,$$

ossia:

$$(17)\quad \text{(nei punti di S')}\quad W(\xi, \eta, \zeta) = \int_\sigma \rho \frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma = \int_\sigma \frac{\psi}{r}d\sigma = V(\xi, \eta, \zeta).$$

Da questa formola e dalla (13) segue finalmente, come si voleva dimostrare,

$$\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'} = \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'_i} = \frac{\overline{dW}}{dn'}\,.$$

15. Nella dimostrazione precedente si è ammessa l'esistenza di $\frac{\overline{dW}}{dn'}$ in tutti i punti di σ. Nello stesso modo si può procedere nel caso in cui sia ammessa l'esistenza di $\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'}$ in tutti i punti di σ.

La formola (17), alla quale siamo pervenuti nella dimostrazione precedente, ci dice che il doppio strato W nel campo S' si trasforma nello strato semplice V.

Inoltre poichè, come fu dimostrato al § precedente, esiste la $\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$, si può similmente costruire uno strato semplice V_1, il quale nei punti del campo finito S coincida col doppio strato W.

Concludendo adunque, possiamo enunciare il seguente teorema: *un doppio strato, la cui densità è una funzione finita e continua, e il quale ammette nei punti di σ la derivata normale* [1]*, si può sempre trasformare in uno strato semplice, tanto nel campo finito* S, *quanto nel campo infinito* S'.

[1]) In virtù del teorema dimostrato al § precedente, basta sapere che questa derivata esiste solamente da una faccia di σ.

S' intende che lo strato corrispondente al campo S sarà diverso dallo strato corrispondente al campo S'.

Osserviamo poi che *se un doppio strato* W *equivale nel campo infinito* S' *ad uno strato semplice* V, *la cui densità* $\psi(\alpha, \beta)$ *sia una funzione finita e continua dei punti di* σ, *si deve necessariamente avere:*

$$\int_\sigma \psi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \,. \tag{18}$$

Infatti, in forza della continuità della $\psi(\alpha, \beta)$, si ha che lo strato V ammette la derivata normale nei punti di σ; sicchè anche il doppio strato W, considerato come funzione dei punti di S', ammette su σ la derivata normale $\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$, e si avrà:

$$\frac{\overline{\overline{dW}}}{dn} = \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn}.$$

Allora, in virtù del teorema al § precedente, esisterà nei punti di σ la $\frac{\overline{dW}}{dn}$, e si avrà ancora:

$$\frac{\overline{dW}}{dn} = \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn} = \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn} \,.$$

Intanto si ha, come è notorio,

$$\int_\sigma \frac{\overline{dV}}{dn}\, d\sigma = 0 \,, \quad \int_\sigma \frac{\overline{dW}}{dn}\, d\sigma = 0 \,;$$

quindi sarà:

$$0 = \int_\sigma \frac{\overline{dV}}{dn}\, d\sigma = \int_\sigma \left(-4\pi\, \psi(\alpha, \beta) + \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn}\right) d\sigma = -4\pi \int_\sigma \psi(\alpha, \beta)\, d\sigma \,,$$

come si voleva dimostrare.

La condizione (18) non è più necessaria nel caso del campo finito S.

16. Occupiamoci ora della questione inversa, di *trasformare uno strato semplice in doppio strato.*

Si abbia lo strato semplice:

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \int_\sigma \psi(\alpha, \beta) \frac{d\sigma}{r},$$

la cui densità sia finita e continua su tutta la superficie σ, e si voglia trasformarlo in un doppio strato nel campo infinito S'.

Sappiamo intanto che condizione necessaria è che la funzione $\psi(\alpha, \beta)$ soddisfi alla (18). Supposta verificata questa condizione, poniamo:

$$V(\alpha', \beta') = \int_\sigma \frac{\psi(\alpha, \beta)}{r'} d\sigma$$

e riprendiamo la soluzione $\phi_1(\alpha, \beta)$ dell'equazione funzionale omogenea (3)''. Si ha:

$$\int_\sigma \phi_1(\alpha', \beta').V(\alpha', \beta')\, d\sigma = \int_\sigma \phi_1(\alpha', \beta') \left\{ \int_\sigma \frac{\psi(\alpha, \beta)}{r'} d\sigma \right\} d\sigma =$$

$$= \int_\sigma \psi(\alpha, \beta) \left\{ \int_\sigma \frac{\phi_1(\alpha', \beta')}{r'} d\sigma \right\} d\sigma ;$$

e poichè si ha, come fu dimostrato al § 7,

$$\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\phi_1(\alpha', \beta')}{r'} d\sigma = C_1 \text{ (costante)} ,$$

risulterà dalla precedente, in virtù della condizione (18),

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha', \beta').V(\alpha', \beta')\, d\sigma = 2\pi C_1 \int_\sigma \psi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0 \ .$$

Adunque la funzione $V(\alpha, \beta)$ soddisfa alla condizione (7); per conseguenza, in conformità di quanto fu stabilito al § 8, si può costruire un doppio strato [vedi form. (8)], il quale, considerato nel campo infinito S', è tale che nei punti di σ prende i valori $V(\alpha, \beta)$, ossia *si può costruire un doppio strato* W, *il quale nel campo* S' *coincide con lo strato* V.

Analogamente si può procedere per trasformare nel campo finito S uno strato semplice in doppio strato, con la differenza che in questo caso la condizione (18) non è necessaria.

17. I calcoli del § precedente ci offrono il mezzo di risolvere in altro modo il *problema derivato di Dirichlet*, digià risoluto nei §§ 9, 10.

Supponiamo infatti di volere *costruire nel campo finito* S *una funzione armonica* $U(\xi, \eta, \zeta)$, *tale che la sua derivata normale nei punti di* σ *coincida con la funzione finita e continua* $\psi(\alpha, \beta)$, *data arbitrariamente su* σ.

Sappiamo che la $\psi(\alpha, \beta)$ deve necessariamente soddisfare alla condizione (18). Supposta verificata tale condizione, si costruisca lo strato semplice V, che abbia per densità la funzione data $\psi(\alpha, \beta)$ e si trasformi nel campo infinito S' lo strato semplice V nel doppio strato W. Si ha:

$$\frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'} = \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'} \ , \quad \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'} = \frac{\overline{dW}}{dn'} \ , \quad \frac{\overline{dV}}{dn'} - \frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'} = -4\pi\, \psi(\alpha', \beta') \ ;$$

quindi, posto:

$$(19) \qquad U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\Big(W(\xi, \eta, \zeta) - V(\xi, \eta, \zeta)\Big) \ ,$$

risulterà, con le solite notazioni,

$$\frac{\overline{dU}}{dn'}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\overline{dW}}{dn'}-\frac{\overline{dV}}{dn'}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\overline{\overline{dV}}}{dn'}-\frac{\overline{dV}}{dn'}\right)=\psi(\alpha',\beta')\ .$$

La funzione U (ξ, η, ζ), data dalla formola (19), risolve quindi il problema proposto.

Nello stesso modo si può procedere per risolvere il *problema derivato esterno di Dirichlet.*

LA SCINTILLA ELETTRICA NEL CAMPO MAGNETICO.

Nota di A. BATTELLI *e di* L. MAGRI.

1. Dallo studio che abbiamo intrapreso da alcun tempo sulla costituzione della scintilla, crediamo utile di stralciare subito, per prenderne data, quei risultati che sono di più diretta esservazione e tuttavia mal conosciuti.

Un esame accurato dei fenomeni luminosi della scintilla porta a concludere che essi possono dividersi con esattezza nelle parti seguenti:

1° Un tratto luminoso, molte volte di splendore diverso nelle sue varie porzioni, che va dall'uno all'altro elettrodo.

2° Delle masse di vapore luminose che vengono staccate dagli elettrodi o lanciate via con velocità diverse. La copia maggiore di vapori viene emessa dall' elettrodo negativo in una fase determinata dall'oscillazione.

3° Un'aureola luminosa, talora molto estesa, che circonda la scintilla.

4° I punti alla superficie degli elettrodi sui quali si imposta la scintilla (o le successive scintilline elementari nel caso di scariche oscillatorie) che sono resi fortemente luminosi dalla corrente elettrica.



Fig. 1.

2. Nel caso di scariche oscillatorie (che è quello in cui ci siamo più particolarmente occupati) questi quattro fenomeni

variano notevolmente col variare delle condizioni della scarica.

La fig. 1 ci rappresenta una scarica di breve periodo (circa 2×10^{-5}) analizzata con lo specchio rotante; al principiare di essa vedonsi benissimo quattro tratti luminosi che vanno dall' uno all' altro elettrodo, che hanno una brevissima durata e che sono dovuti all'eccitazione prodotta nell' aria dal passaggio della scarica. Questi tratti non sono però ben visibili nella figura qui riportata; la zincotipia si presta male a riprodurre fotografie come queste, che hanno subito nelle loro parti impressioni molto diverse e che presentano particolari di grande sottigliezza. Ogni scarica parziale, prima che sia raggiunto il massimo di intensità della corrente, stacca delle masse di vapore dagli elettrodi e in molto maggior quantità dell'elettrodo negativo. Queste masse di vapori si muovono come proiettili

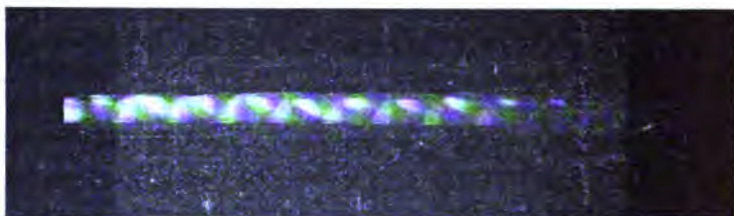


Fig. 2.

luminosi con moto ritardato e con velocità diverse a seconda del periodo di oscillazione; e seguitano ad emetter luce per un certo tempo senza che le scariche successive producano su di loro nessuna altra azione. In generale esse possono anzi



Fig. 3.

percorrere cammini affatto indipendenti da quelli percorsi dagli ioni o dagli elettroni che compiono la scarica dei condensatori.

I punti alla superficie degli elettrodi sui quali si impostano le successive scintille elementari sono resi molto luminosi, specialmente al catodo, e sono quelli che hanno impresso nella fig. 2 i tratti orizzontali.

Aumentando l'autoinduzione e quindi il periodo, l' eccitazione dell'aria va scomparendo, mentre l' emissione di masse di vapori dura per una frazione più lunga dell' oscillazione e acquista una maggiore importanza (figg. 2 e 3).

Le figg. 4 e 5 mostrano le immagini ingrandite di scintille oscillatorie fotografate direttamente senza specchio rotante. Esse ci fanno vedere con chiarezza l' aureola, i punti



Fig. 4.

luminosi alla superficie degli elettrodi (fig. 4) e il cammino delle masse di vapore lanciate via dagli elettrodi stessi (fig. 5).



Fig. 5.

Specialmente con periodi lenti, le varie scintille elementari costituenti la scarica scoccano in punti degli elettrodi assai lontani fra loro.

Le negative della fig. 3 e della fig. 5 ottenute con valori molto notevoli dell'autoinduzione mostrano come in questi casi la scarica sia preceduta da un'esile scintilla pilota, la quale però, per la sua sottigliezza, è quasi scomparsa nelle riproduzioni. Osservando attentamente la fig. 3, si vede ancora questo sottile tratto luminoso che precede di pochi decimi di millimetro il resto della immagine della scintilla; ma nella fig. 5, nella quale questo tratto è in mezzo alle masse di vapori, esso è divenuto quasi invisibile. Con grande attenzione tuttavia il lettore potrà scorgerlo come una sottile linea arcuata, che at-

traversa a sinistra l'aureola dei vapori partendo dalla prominenza luminosa inferiore di sinistra e giungendo al lato sinistro della prominenza luminosa superiore.

3. Per avere elementi di miglior indizio sul meccanismo della scintilla elettrica, abbiamo anche osservato il suo comportamento nel campo magnetico.

In questa Nota preliminare diamo cenno di qualche risultato ottenuto appunto in queste condizioni e che ci sembra di un certo interesse.

Se la scarica è di brevissimo periodo, essa — per quanto si può vedere — non sente quasi affatto l'azione di un campo magnetico anche assai intenso.



Fig. 6.

Se invece il periodo è lento, allora l'azione del campo è molto notevole.

La fig. 6 mostra appunto una scintilla di lento periodo senza campo, la fig. 7 una scintilla nelle stesse condizioni ma col campo. Si vede da questa ultima figura, quantunque non

completamente riprodotta nella zincotipia, come la scarica stessa sia grandemente spostata e sconvolta dall' azione del



Fig. 7.

campo, e come anche la traiettoria dei vapori metallici venga notevolmente cambiata.

Ciò è forse dovuto in parte al fatto che questi vapori sono trascinati dagli ioni o dagli elettroni che eseguiscono la scarica del condensatore, e in parte all'altro fatto che i vapori stessi sono ioni e vengono quindi deviati nel loro moto dal campo magnetico.

Ciò verrà meglio definito dai risultati delle esperienze spettroscopiche che abbiamo in corso.

STUDIO ELETTRICO E OTTICO DELL'ARCO ALTERNATIVO.

Dott. LUIGI PUCCIANTI.

Un recente lavoro sperimentale di Lombardi e Melazzo [1]), nel quale sono anche riferiti i resultati più importanti di precedenti sperimentatori, contiene una descrizione fotografica, ottenuta con un metodo stroboscopico, delle interessanti variazioni in forma e splendore dell'arco con corrente alternata nelle diverse fasi. Nel considerare queste ricerche, io le riconnettevo con quelle di Crew e Baker [2]) e di De Watteville [3]) sullo spettro di emissione dell'arco alternativo nelle diverse fasi e con gli studi del Lenard [4]) e di A. Garbasso [5]) sull'arco continuo, mediante lo *spettroscopio senza fenditura*, e infine con alcune mie esperienze in cui confrontavo la dispersione anomala dei vapori metallici nelle fasi massima e zero della corrente alternata [6]).

E pensai come, disponendo io di mezzi adeguati, mi sarebbe stato agevole il compiere su questa materia una ricerca più vasta, in cui le esperienze sullo spettro, sulla forma dell'arco e sui suoi elementi elettrici convergessero al fine comune di ottenere una conoscenza completa del fenomeno.

Ma bisogna riflettter bene su ciò che s'intende per forma dell'arco, anzi le esperienze di Lenard mostrano che già per la corrente continua non vi è veramente *una forma* dell'arco, ma varie forme per le varie righe del suo spettro, fin anche per diverse righe di uno stesso elemento. E siccome colla corrente alternata da una fase all'altra la composizione dello spettro può variare notevolmente, per esempio colla scomparsa

1) Atti della Associazione Elettrotecnica, IX, 1, 1905.
2) Astrophysical Journal, XXII, 199, 1905.
3) C. R., CXXXIX, 485, 1904.
4) Ann. d. Physik (4), XI, 1903.
5) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino (2), LIV, 408, 1904.
6) Memorie della R. Accademia dei Lincei (5), VI, 28, 1906.

di alcune righe delle più forti, si comprende facilmente che la serie di figure o vista o fotografata coll'aiuto dello stroboscopio, così senz'altro, non rappresenta niente di ben determinato in ciascuno dei suoi termini e nemmeno di omogeneo da un termine all'altro. Talvolta ciò che appare come una variazione può essere piuttosto una sostituzione.

Stabilii adunque di fare lo studio stroboscopico della forma collo spettroscopio senza fenditura, cioè come si fa lo studio delle protuberanze e cromosfèra solari.

Prime esperienze.

La prima disposizione sperimentale non mi soddisfaceva pienamente, presentando certi inconvenienti che in seguito furono tolti; ma siccome mi dette pure alcuni risultati attendibili che riferirò più giù, è necessario che ne dia una sommaria descrizione.

Adopravo un convertitore di corrente costruito da Ganz, che già mi aveva servito bene in altre ricerche.

Sull'asse stesso di questa macchina feci adattare a un estremo una solida guarnitura per portare i dischi stroboscopici (grandi dischi di cartone con finestrette disposte lungo spirali di Archimede in modo che a un costante spostamento radiale corrispondesse un costante spostamento di fase). All' altro estremo assicuravo le mollette giranti di un disco di Joubert il quale era spostabile intorno all'asse stesso di modo che il contatto si verificasse per un tempo brevissimo ad una certa posizione dell'indotto, cioè in una certa fase variabile a piacimento e determinabile dalla graduazione del disco stesso.

La relazione di fase tra le esperienze elettriche e le ottiche era dunque sicura, essendo solidali il contatto mobile e il disco stroboscopico.

Niente di notevole nella disposizione elettrica. Basta dire che si seguiva in sostanza il metodo classico di Joubert, usando per la compensazione un potenziometro con pila campione.

L' intensità e la differenza di potenziale efficaci ai poli dell'arco eran date da due strumenti a filo caldo.

L'arco tra carboni verticali era mantenuto con un regolatore a mano, e poteva mediante un apposito congegno, essere spostato verticalmente lungo un raggio del disco stroboscopico.

Questo spostamento avveniva nel piano focale di un primo obiettivo da telescopio (circa 160 cm. di distanza focale).

La luce dell'arco, passata per le fenditure, perdeva la sua divergenza traversando questo obiettivo, e poi era dispersa da due prismi di solfuro di carbonio e, mediante una seconda lente acromatica con 80 cm. circa di distanza focale, veniva fatta convergere in una figura spettrale in cui ogni lunghezza d'onda, ossia ogni riga, formava un'immagine dell'arco. Le varie immagini erano poste in fila tra due spettri continui (non puri) lineari prodotti dai due carboni.

Spostando verticalmente l'arco si aveva una serie di queste figure corrispondenti alle diverse finestre del disco, ossia alle diverse fasi.

Esse potevano essere raccolte e osservate su di un vetro spulito, o fissate su di una lastra fotografica.

Si poteva interporre avanti alla prima lente un prisma a riflessione totale e un sistema di lenti che proiettava l'immagine dell'arco sulla fenditura di uno spettrografo; e allora si otteneva in esso spostando l'arco una serie di spettri l'uno sotto l'altro, ma questa volta di veri spettri puri.

Così feci varie fotografie e rilevai le relative curve di I e di E, usando carboni preparati con sali di sodio, bario, stronzio, e mentre notai da un lato alcune particolarità interessanti dei fenomeni di cui mi ero proposto lo studio, dall'altro riconobbi tre serii inconvenienti della disposizione, i quali mi proposi di togliere.

La misura elettrica col potenziometro era troppo complicata e troppo lenta.

Non era bene che sulla fenditura dello spettrografo si proiettasse l'immagine dell'arco, perchè così si otteneva lo spettro della parte assiale e non di tutta quanta la luce nel suo complesso.

Non era facile talora riferire le fotografie dei due spettrografi aventi dispersioni diverse.

La seconda disposizione che sostituii a questa prima risultò in tutto rispondente allo scopo, e qiundi la descriverò un po' nei particolari.

Disposizione elettrica.

La disposizione elettrica è rappresentata dalla fig. 1. La corrente alternata principale dall' una all' altra spazzola del convertitore passa per un reostato R_2, per l' amperometro a filo caldo di Hartmann e Braun Am, per un nastro di manga-

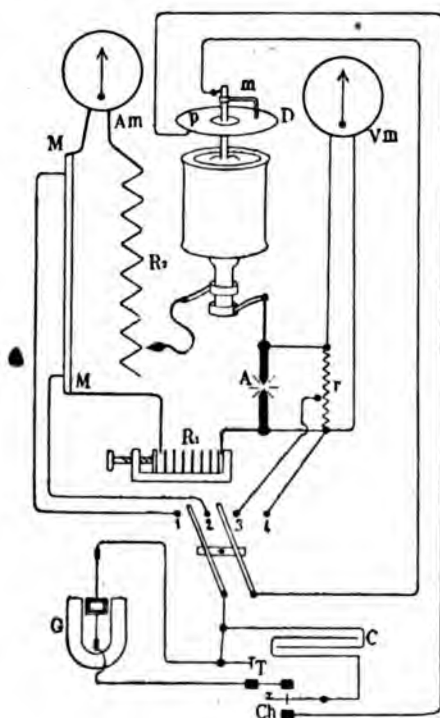


Fig. 1.

nina MM lungo circa un metro, per il reostato R_1 di carbone e nichelio a variazione continua colla pressione e per l'arco A. Sul nastro di manganina è presa una derivazione mediante due fili che mettono capo alla coppia 1, 2 dei pozzetti di mercurio di un commutatore bipolare.

In derivazione sull' arco è posta una resistenza *r* assai grande con autoinduzione trascurabile, e pure in parallelo con questa il voltometro Vm a filo caldo di Hartmann e Braun.

Una derivazione secondaria sopra una parte conosciuta di *r* è presa con due fili che metton capo agli altri due pozzetti 3, 4 del commutatore.

La differenza di potenziale esistente tra 1 e 2 è proporzionale alle intensità, e quella tra 3 e 4 alle differenze di potenziale.

I pezzi mobili del commutatore sono connessi a traverso al disco di Joubert D e la chiave di carica e scarica Ch, col galvanometro balistico G e col condensatore C.

Il galvanometro è un d'Arsonval di Carpentier con un largo telaio mobile, e quindi con lunga durata di oscillazione e uno smorzamento piccolissimo; esso però può essere prontamente arrestato abbassando un momento il tasto T.

Quando la chiave Ch è in basso, il condensatore si carica colla differenza di potenziale esistente tra 1, 2 o 3, 4 (a seconda della posizione del commutatore) nella fase corrispondente al contatto della molletta *m* col piolino *p* del disco di Joubert.

Lasciando salire la chiave, si scarica il condensatore attraverso a G, e la elongazione misura l' intensità o la differenza di potenziale.

Il galvanometro fu tarato confrontandolo mediante la corrente continua coll' amperometro e col voltometro, ed anche caricando C con una pila campione.

L' isolamento di tutte le parti C, D, Ch, *b*, *m*, *p* fu curato in modo speciale per evitare disturbi dipendenti dal potenziale assai elevato relativamente al suolo.

In sostanza uno dei soliti metodi per rilevare la curva di una corrente alternata. Se esso non presentava la speditezza e la comodità di un oscillografo, pure mi dette resultati perfettamente concordanti tra loro e precisi.

D' altra parte il tempo di posa delle fotografie era assai lungo, e questo si impiegava nelle misure.

Disposizione ottica.

Questa mi dette assai più da pensare.

Volli che le due fotografie con e senza fenditura fossero ottenute collo stesso spettrografo, per poterle facilmente riferire l'una all'altra, che la luce di tutte le parti dell'arco intervenisse nella formazione dello spettro puro, che si potesse escludere la luce dei carboni, per non velare con uno spettro continuo lo spettro di righe.

Con un semplice cambiamento si passava dalla disposizione per lo spettro con fenditura (fig. 2) a quella per lo spettro senza fenditura (fig. 3).

Nel primo caso (fig. 2) la luce dell'arco A percorre la via indicata dalla riga —·—·—·, formando un fascio sufficientemente

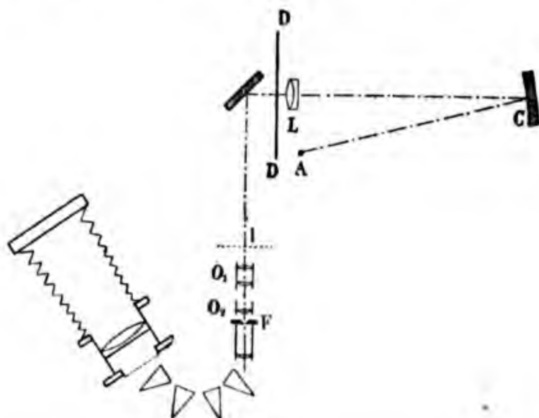


Fig. 2.

largo per coprire tutte le fenditure del disco rotante. Lo specchio concavo C e la lente L proiettano in I un'immagine reale dell'arco stesso, dalla quale viene con un apposito schermo tolta la parte rappresentante gli estremi dei carboni; poi il sistema di obiettivi fotografici $O_1\,O_2$ forma sulla fenditura F l'immagine del disco stroboscopico, cioè, quando questo è in veloce rotazione essa vien spartita in molte porzioni sovrapposte corrispondenti alle varie fasi.

Il sistema delle lenti avanti la fenditura ha inoltre l'ufficio di far convergere i raggi in una seconda immagine dell'arco la quale viene a cadere fra i prismi; e siccome essa è notevolmente più piccola della faccia di questi, così ero sicuro di esaminare la totalità della luce emessa dall'arco.

Gli spettri delle varie fasi risultavano sulla lastra giustapposti e riferiti l'uno all'altro.

Nel secondo caso (fig. 3) l'arco A è direttamente davanti al disco stroboscopico DD, (il quale è allora fornito di finestre più

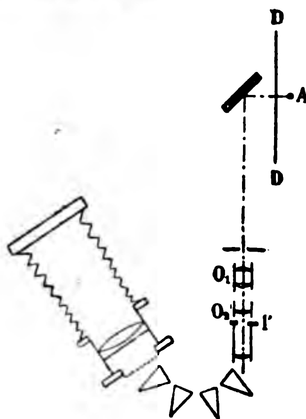


Fig. 3.

alte) e si può fare scorrere in alto e in basso mediante apposito congegno: il pezzo della fenditura è tolto, e a suo luogo si forma l'immagine I' dell'arco, la quale via via che questo si sposta di grado in grado, si sposta pure e si muta corrispondentemente alle diverse fasi.

Un diaframma posto davanti alle lenti, assicura che l'immagine abbia sempre la stessa luminosità: esso a tal fine ha larghezza e posizione tali che il pennello da lui limitato passi poi liberamente attraverso a tutte le parti ottiche per tutte le posizioni dell'arco. Così sopra una seconda lastra si ottengono una sotto l'altra le figure spettrali, aventi al posto di ciascuna riga un'immagine dell'arco.

La esposizione per il primo caso era assai lunga da 1 a 3 ore. Io approfittavo del tempo per fare le misure elettriche,

mentre un aiutante spostava il disco di Joubert e invigilava la costanza della intensità efficace e della lunghezza dell'arco.

Questa si misurava mediante l'immagine ingrandita in rapporto conosciuto che una lente ne proiettava sopra una scala in centimetri.

La graduazione dello spettrometro fu fatta riferendosi alle righe dello spettro solare coll'aiuto di una Mappa Fotografica normale del Rowland.

Le lastre usate erano le *Perorto* e le *Perchromo* di Otto Perutz (Monaco di Baviera) che riconobbi, come sempre, eccellenti sia per ortocromatismo sia per finezza e forza d'immagine.

Non m'indugerò più a lungo sulle cure prese per render facile il maneggiamento delle varie parti, per difendere le parti ottiche dallo scotimento della macchina e l'arco dalla violenta agitazione dell'aria prodotta dal disco stroboscopico, l'insieme dello spettrografo dalla luce diffusa e da spostamenti eventuali delle parti. Esse rientrano nella tecnica quotidiana.

Pensai attentamente alla più opportuna posizione da dare all'arco. La verticale, che era la più comoda, mi presentava l'inconveniente di porre i due carboni in condizioni un po' diverse tra loro, in quanto che il superiore si scalda un po' di più o almeno più estesamente.

Ma ebbi modo di verificare che la differenza tra le condizioni in due fasi opposte, non era molto notevole, e inoltre siccome io tenevo conto preciso degli elementi elettrici nel tempo, così giudicai non dannosa al significato delle esperienze questa leggera causa di dissimmetria.

Riguardo al tempo di esposizione si potevano seguire due criteri diversi. Il più semplice sarebbe stato quello di esporre egualmente in tutte le fasi. Questo ci avrebbe mostrato come effetto principale un'intensità maggiore nel massimo che in vicinanza dello zero, cioè niente di interessante, e solo come effetti secondari le differenze tra riga e riga che erano invece l'oggetto vero della parte spettroscopica della ricerca.

L'altro criterio, che io ho adottato, è di aumentare la posa in vicinanza dello zero in modo che un elemento dello spettro rimanga pressochè costante; la variazione degli altri si apprezza relativamente a quello.

A tal fine, delle diverse finestre del disco per lo spettro puro, quelle che corrispondevano intorno al minimo erano più ampie. Per le immagini senza fenditure per cui la posa è di pochi secondi per ciascuna, e si fanno successivamente, era invece prolungata l'esposizione nello stesso rapporto.

Il punto più importante per la buona riuscita delle esperienze è la preparazione dei carboni:

Il sale del metallo di cui si voleva ottenere lo spettro, veniva asciugato fondendolo, finamente polverizzato, mischiato intimamente ed altrettanta grafite, e la mescolanza fortemente compressa entro i carboni bucati, i quali non sono altro che ordinari carboni a miccia a mezza lavorazione. Infine i carboni erano ancora arroventati per scacciare ogni traccia di umidità.

Con queste cure è possibile ottenere una buona costanza del regime dell'arco per qualche ora.

I resultati.

Li espongo come provengono direttamente dalle mie esperienze, e avverto ancora, sebbene forse sarebbe superfluo, che quelli, riguardo agli elementi elettrici e agli spettri sono simili ad altri di precedenti sperimentatori e quindi, considerati separatamente, non contengono molto di nuovo.

Nuovi sono quelli dati dallo spettrografo senza fenditura che, per quanto è a mia conoscenza, non era mai stato applicato allo studio dell'arco alternativo, e quelli derivanti dalla combinazione delle tre esperienze.

Le prime esperienze furono eseguite su *Bario, Stronzio e Sodio*, e mostrano la scala di eccitazione corrispondente alle diverse fasi. In una fase che corrisponde presso a poco all'istante d'inversione della corrente, e che chiamerò *fase di estinzione*, gli spettri perdono il carattere di spettri di arco per assumere quello di spettri di fiamma: essi sono molto simili ai corrispondenti dell'atlante di Hagenbach e Konen [1]) che sono ottenuti colla fiamma del gas illuminante alimentata con ossigeno. Presentano un numero limitatissimo di righe metalliche, e sono composti come segue:

1) Gustav Fischer in Jena, 1905.

Per carboni con *cloruro di sodio* la riga D forte e la 568 [1]) (della prima serie accessoria) debolissima;

Per carboni con *cloruro di stronzio*, sola riga ben visibile nelle fotografie la 460,8 che si ottiene anche nella fiamma del bruciatore Bunsen;

Per carboni con *cloruro di bario*, le bande verdi che Hagenbach e Konen attribuiscono al cloruro (514, 517, 524, 532); la 553,6 riga di fiamma; e debolissima la 455,4 (riga fortissima nell'arco ordinario e indebolita nella scintilla).

In tutte le fotografie si osserva poi la riga 422,7 (g. solare) del calcio presente come impurità (anche questa, riga di fiamma). Altre righe o mancavano affatto o erano così deboli da non dare traccia sulla lastra.

Nelle fasi seguenti lo spettro si completa e rinforza per poi decrescere e impoverirsi di nuovo andando allo zero successivo.

Questi resultati sono in armonia con quelli ottenuti da precedenti sperimentatori per righe di altri metalli, e non fanno che estenderli; ma sulle fotografie osservai ancora, ciò che non avevo letto, che cioè il riapparire della maggior parte delle righe d'arco è molto brusco.

Le fotografie con lo spettrografo senza fenditura mi mostravano poi grandi differenze di comportamento durante un periodo per le immagini corrispondenti alle diverse righe di uno stesso elemento.

Il caso del sodio, sia per l'aspetto molto caratteristico di queste figure, sia per la semplicità e regolarità dello spettro, mi parve da sottoporre per il primo a una ricerca più accurata, e appunto con carboni ripieni di cloruro di sodio ho fatto le esperienze colla seconda disposizione. Qui ne riferisco i resultati sperando di far seguire presto un'altra nota con altre esperienze e la riproduzione in collografia di qualche prova fotografica.

a) *Gli elementi elettrici.*

Il convertitore è quadripolare, in queste esperienze faceva circa 900 giri per minuto primo, che corrispondono a 30 pe-

1) Tutte le righe sono indicate per mezzo della loro lunghezza d'onda in $\mu\mu$ (milionesimi di mm.).

riodi completi per secondo; la forza elettromotrice misurata a circuito aperto era di 108 *volta* essendo in serie con l'arco una resistenza piuttosto grande, che assorbiva la maggior parte della potenza.

I resultati delle misure col disco di Joubert sono rappresentati graficamente nei diagrammi della fig. 4 (pag. seg.) per un intervallo di tempo comprendente il mezzo periodo di cui fu fatto anche l'esame ottico. Da esso il lettore può facilmente ricostruire l'intero periodo completo. La regolarità di questo come la uguaglianza dei due periodi compresi in una rivoluzione dell'indotto fu assicurata con misure estese a tutto un giro del disco.

La intensità presenta un massimo che anticipa notevolmente rispetto alla posizione intermedia fra due zeri consecutivi. Vero è che ciò non dipende dall'arco ma dalla macchina da me usata, perchè la stessa anticipazione si verifica anche quando all'arco si sostituisca una resistenza metallica equivalente.

La curva dell'intensità passa per lo zero con una inflessione a tangente quasi orizzontale; cioè è assai piccola prima e dopo della fase nulla per un intervallo piuttosto esteso.

La differenza di potenziale invece passa per lo zero risolutamente, e anzi la sua curva presenta in questo punto la massima inclinazione.

Essa subito dopo lo zero, mostra un massimo assai forte, mentre la intensità è ancora assai esigua, poi cade bruscamente e si mantiene in seguito presso che costante fino in vicinanza dello zero successivo, sul quale cade rapidamente.

I diagrammi, che rappresentano diverse curve per diverse lunghezze dell'arco e per diversi valori dell'intensità efficace, hanno tutti queste caratteristiche, ma mostrano ancora che il tratto di intensità esigua cresce colla lunghezza dell'arco e decresce col crescere dell'intensità efficace. Corrispondentemente varia il tratto di differenza di potenziale superiore alla media. È insomma come se in ogni inversione vi fosse una specie di ostacolo al riformarsi dell'arco, e questo ostacolo fosse maggiore quando i carboni sono più discosti e la intensità efficace minore.

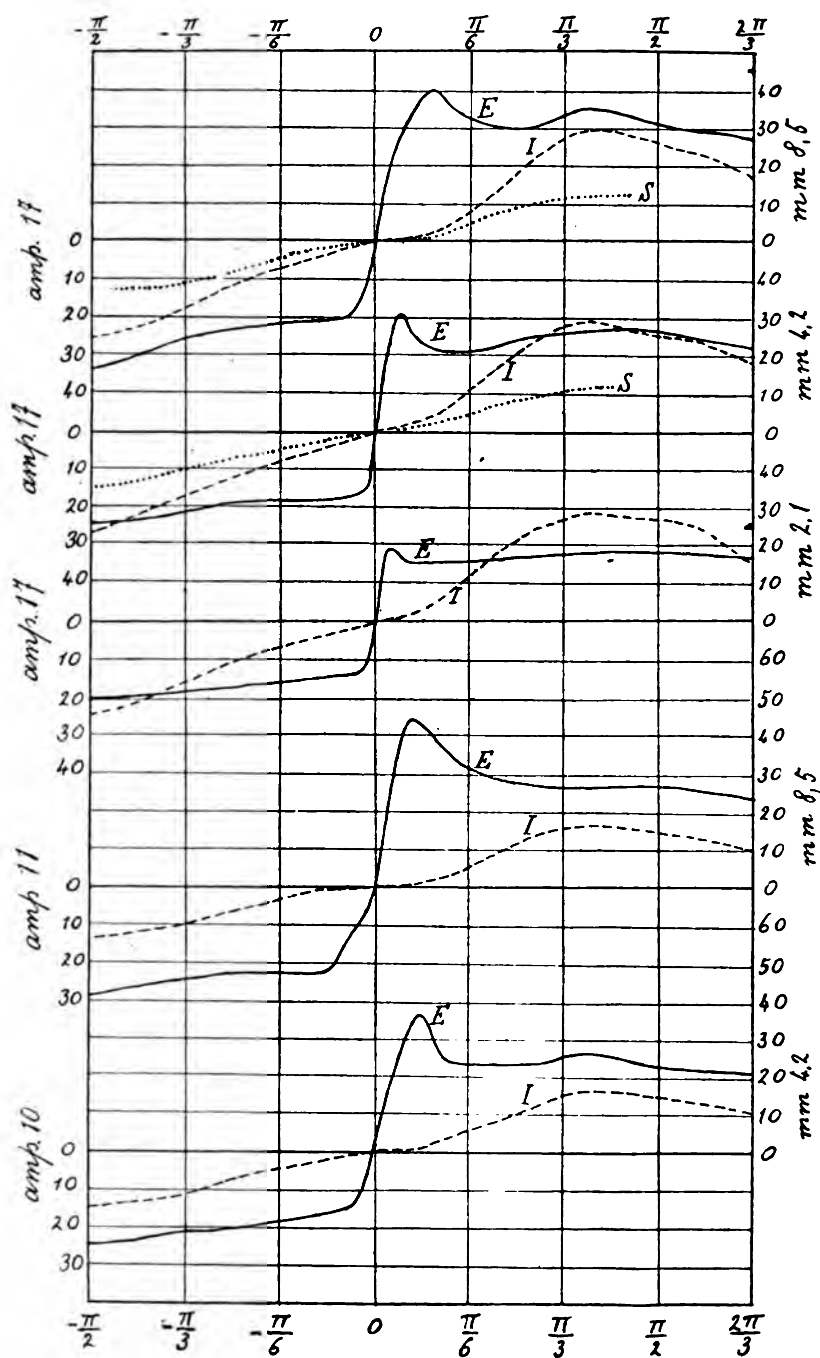


Fig. 4.

Dopo superato questo ostacolo l'arco si mantiene con una differenza di potenziale pressochè costante; ciò che mostra che la sua conducibilità aumenta coll' intensità della corrente che lo attraversa.

Invero la differenza di potenziale per la stessa intensità è un po' maggiore quando questo è crescente che quando è decrescente e questa diversità si fa sentire sempre più quanto più l' arco è lungo e piccola la intensità efficace: come pure il massimo iniziale è in questo caso più pronunziato. Un arco molto corto si avvicina assai ad avere una differenza di potenziale costante, ora in un senso ora nell'altro, salvo un piccolissimo tratto, all' inversione.

Si ha dunque una caduta di potenziale agli elettrodi complessivamente di circa 15 volta più una caduta di potenziale lungo l'arco crescente con la lunghezza.

Questa divisa per l' intensità della corrente dà una resistenza che si deve attribuire alla colonna di vapori tra i due carboni.

Il valore così ottenuto è grandissimo per un piccolo intervallo dopo lo zero, poi decresce rapidamente fino a divenire assai piccolo, ed in seguito decresce ancora un poco ma assai lentamente fino allo zero successivo.

Se si attribuisce al conduttore gassoso una conducibilità specifica costante, la sua sezione sarà inversamente proporzionale a questa resistenza: cioè estremamente piccola subito dopo lo zero, in seguito pressochè proporzionale all' intensità, ma relativamente un po' più grande per intensità decrescente che per intensità crescente. Tenendo presente questo concetto, prendiamo in considerazione gli elementi ottici.

b) *Variazione dello spettro.*

Come ho già detto, si rilevava dalle prime esperienze che delle righe metalliche (sia del sodio sia dell' impurità dei carboni) quelle così dette di alta temperatura, si spengono del tutto nella fase di estinzione insieme colle bande del cianogene e del carbone; quelle medie si indeboliscono molto in vicinanza di essa; quelle dette di bassa temperatura rimangono

notevolmente intense di modo che lo spettro in questa fase assume il carattere di uno spettro di fiamma. Ma non bisogna credere che il grado di eccitazione cresca gradatamente dalla fase di zero a quella di massimo. Le mie fotografie, ottenute dalla seconda disposizione, mostrano che l'intensità relativa delle righe di più alta eccitazione sale assai rapidamente subito dopo lo zero, e non presenta un massimo pronunziato. Ciò non deve meravigliare se si pensi che il grado di eccitazione può essere messo in relazione piuttosto colla densità che colla intensità della corrente. Ma un' analisi esatta sarebbe complicata, come mostrano le esperienze sulla forma dell'arco. La fase di estinzione si trovò sempre leggermente in ritardo rispetto alla fase di inversione; ma pur sempre entro l'intervallo di intensità esigua. Le righe di alta eccitazione ricompaiono più presto e più vivamente con archi corti per i quali la intensità risale più presto.

Per esempio in tutte le fotografie non che con l'osservazione diretta, si riconosce per le righe del sodio, che, essendo pressochè compensata coll'esposizione l'intensità della riga D in modo che la sua traccia sulla lastra sia ugualmente forte in tutte le fasi, le righe 568, 498, 467, 450, 439, della prima serie accessoria hanno intensità nulla nella fase di estinzione. Un piccolo residuo resta veramente per le prime due o tre che sono più forti, forse anche a causa della larghezza della fenditura stroboscopica. Nelle fasi successive la loro intensità sempre relativa alla D cresce rapidamente, mentre decresce avvicinandosi alla fase di estinzione attraverso alle fasi che la precedono. Le righe 515, 475 della seconda serie accessoria presentano un andamento analogo, ma sono più deboli. Il riaccendersi di tutte queste righe è più pronto con archi corti che con archi lunghi, e va in ciò e nel resto perfettamente d'accordo col risalire della intensità della corrente. Ciò fa pensare che le righe della prima e della seconda serie accessoria siano connesse strettamente colla eccitazione elettrica; sia che il fenomeno elettrico intervenga direttamente nella loro produzione, sia indirettamente producendo il grado di eccitazione o addirittura di temperatura che occorre per la loro eccitazione.

Questa seconda ipotesi è più ammissibile, perchè una debolissima traccia, come abbiamo visto, persiste sempre, e perchè anche la riga 568 si produce sebbene con piccola intensità nelle fiamme più calde. Ad ogni modo o direttamente o indirettamente le righe delle serie accessorie si presentano come indici della conduzione elettrica a differenza della D (tipica riga di fiamma) la quale persiste con grande intensità anche quando la corrente si annulla.

c) *Immagini ottenute collo spettrografo senza fenditura.*

Vediamo ora come tutto ciò sia confermato nel miglior modo dalle esperienze sulla forma dell'arco.

La riga D dà un'immagine ovale sensibilmente più forte all'estremo negativo (ciò era da aspettarsi), la quale varia poco in larghezza colla fase, si assottiglia poco dopo l'inversione avendo la minima larghezza circa $^1/_{12}$ di periodo dopo questa.

Ben diversamente varia l'immagine delle righe della prima serie accessoria, delle quali la verde (la 568) è la più visibile. Quest'immagine che in vicinanza del massimo è conformata ed estesa quasi come quella della riga D si assottiglia gradatamente e si indebolisce fino a perdersi del tutto o quasi nella fase di estinzione, per riapparire dopo sottilissima e intensa con un aspetto non dissimile da una scintilla.

Questo riapparire segna la fine dell'intervallo d'intensità esigua.

Misurando, come meglio si può sulle lastre la larghezza della base negativa di queste immagini e calcolando approssimativamente la sezione $S = \pi r^2$ del conduttore che esse rappresentano, si ottengono valori proporzionali all'intensità di corrente, ma relativamente un poco eccedenti nella fase decrescente rispetto a quella saliente, come mostrano i relativi diagrammi. Tutto ciò si può riassumere nella seguente rappresentazione del fenomeno.

1° Le immagini dell'arco date dalle righe della prima serie accessoria (e così anche quelle di parecchie altre righe metalliche presenti a causa di impurità dei carboni) sono fedeli

rappresentazioni della parte essenziale di esso, cioè di quella che conduce la corrente. Questa parte possedendo una conducibilità specifica presso che costante in tutte le fasi, ha una sezione dipendente dall'intensità, di modo che la densità della corrente varia solo di poco decrescendo da una fase zero alla successiva. Lo splendore varia pure, ma di poco come la densità.

2° La riga D invece dà un'immagine che rappresenta la parte dirò così inerte dell'arco, quella cioè che non partecipa al fenomeno elettrico, ma invece è da esso prodotta.

Questa è la rappresentazione del fenomeno in blocco. Ma vi sono due particolarità che non rientrano in essa. L'una di interesse principalmente spettroscopico, l'altra principalmente elettrica.

1) Le immagini appariscono tutte a contorni laterali quasi perfettamente netti, e le più larghe sono spesso sensibilmente più deboli verso il mezzo, come se la forma corrispondente del vapore luminoso fosse cava.

Ciò è in perfetto accordo con quel che osservò Lenard nell'arco continuo.

Nella parte centrale dell'arco il grado di eccitazione non può certo essere minore che nella periferica, e questa particolarità fa vedere che essa anzi è assai maggiore, e che quando oltrepassa un certo limite, quelle tali righe non si producono più. E ciò è in armonia coi resultati delle ricerche di N. Lockyer che mostrano come le righe *rafforzate* (corrispondenti alle più alte eccitazioni ottenibili nei nostri laboratori) formano spettri poco ricchi, e che nelle stelle più *calde* sono presenti queste sole righe, e quindi mancano la maggior parte delle righe di arco.

Bisogna ancora osservare come questo crescere dell'eccitazione dall'esterno all'interno dell'arco induce a sospettare che l'ipotesi di una densità di corrente uniforme non possa essere che approssimata, e che verso l'asse la corrente abbia densità via via maggiore [1]).

1) Soltanto sospettare, perchè non è assurdo pensare la densità costante e la eccitazione minore all'esterno a causa della maggiore dispersione dell'energia nell'ambiente.

2) In corrispondenza del breve intervallo che segue alla fase zero e in cui la corrente è esigua, e che comprende quella che ho chiamata *fase di estinzione*, non si trova un sottilissimo filo per la riga 568 ma un'immagine debolissima e diffusa, un residuo dello stato anteriore, che con intensità piccola può anche mancare del tutto.

Se mantenendo fissa la fase di circa $\pi/_{10}$ dopo lo zero e costante la intensità efficace con l'aiuto del reostato a variazione continua, si avvicinano gradatamente i carboni mentre si osserva sul vetro spulito la regione gialla verdastra, si vede a un certo punto apparire di un colpo l'immagine sottile e brillante.

Ciò ricorda molto lo scoccare della scintilla tra due conduttori, e probabilmente non si tratta di una semplice somiglianza superficiale. Gli ioni rimasti nell'intervallo tra i due carboni e che mantengono colla loro mobilità la *corrente esigua* (la quale è dunque una corrente *non autonoma* [1]) avranno velocità via via maggiori al crescere del campo dopo la fase zero, e tanto maggiori quanto più son vicini i carboni. Così aumenterà il numero degli ioni che essi producono per urto con le molecole, e si giungerà a un istante critico in cui la corrente diventerà *autonoma* ossia produrrà essa stessa la conducibilità del gas che traversa. Non diversa è in sostanza la spiegazione che si suol dare dello scoccare della scintilla tra due conduttori al crescere del campo. Ma nel nostro caso non si può non tener conto degli ioni prodotti dagli elettrodi incandescenti che si aggiungono in gran numero a quelli prodotti per urto aumentando notevolmente la conducibilità, però solo a questi ultimi mi pare sia da attribuire il carattere esplosivo del fenomeno.

Rendo grazie al prof. Ròiti direttore di questo Gabinetto di Fisica.

Firenze, Istituto di Studi Superiori
Aprile 1907.

---

1) Traduco con *non autonoma* e *autonoma* l'*unselbständig* e il *selbständig* di J. Stark: vedi p. 118 di Elektrizität in Gasen, Leipzig J. A Barth 1902.

ULTERIORI RICERCHE SUL COMPORTAMENTO ELETTRICO DEL SELENIO.

Nota di A. POCHETTINO *e* G. C. TRABACCHI.

In una Nota precedente [1]) abbiamo riferito delle esperienze dalle quali risultava come, variando opportunamente la temperatura e la durata del ricuocimento delle cellule al selenio (ricuocimento durante il quale avviene la nota trasformazione del selenio non conduttore in selenio conduttore), si potessero ottenere delle cellule aventi comportamento affatto diverso rispetto alla luce e che noi distinguemmo in *cellule di prima specie* e in *cellule di seconda specie.*

Queste cellule hanno in definitiva i seguenti caratteri differenziali: le cellule *di prima specie* possiedono, a temperatura ordinaria, una resistenza elettrica elevata ed un effetto fotoelettrico *positivo* (diminuzione di resistenza alla luce) ambedue elevantisi col passaggio attraverso la cellula per pochi secondi (10 al massimo) di una corrente alternata di conveniente voltaggio; al contrario le cellule *di seconda specie* hanno, alla temperatura ordinaria, una resistenza elettrica relativamente bassa ed un effetto fotoelettrico *negativo* (aumento di resistenza alla luce): in queste ultime cellule al passaggio di una corrente alternante di conveniente voltaggio la resistenza cresce considerevolmente e l' effetto fotoelettrico si inverte diventando *positivo.*

Già durante le esperienze riportate nella Nota citata avevamo potuto osservare la grande influenza che le variazioni di temperatura esercitano sul comportamento di ambedue le specie di cellule, specialmente in quella di seconda specie; riferire su di una nuova serie di misure intese a ben definire questo comportamento per ciascuna specie di selenio è lo scopo

1) Rend. Acc. Lincei, 15, 2° sem. 1906; vedi anche N. Cimento, 12, (5), pag. 335, 1906.

della presente Nota nella quale sono riportati i risultati di esperienze effettuate sopra alcune delle cellule che ci hanno servito nelle precedenti ricerche e su altre costruite espressamente.

Il dispositivo sperimentale è lo stesso da noi già usato nelle precedenti ricerche solo che le cellule vennero ora collocate nell'interno di una stufetta di Gay-Lussac; un termometro opportunamente disposto in immediata prossimità della cellula ci permetteva di conoscerne ad ogni istante la temperatura.

Dalle nostre ricerche risulta dapprima confermato il fatto, già osservato da molti altri, che il selenio con cui sono preparate le cellule comune (o *di prima specie*, ad effetto fotoelettrico *positivo*), sottoposto ad un riscaldamento, diminuisce di resistenza al crescere della temperatura. Però, siccome le misure finora compiute, e che si trovano largamente esposte nella completa monografia sul selenio dell'Amaduzzi [1]), non presentano un assieme di risultati ordinati e concordi; crediamo non inutile, anche per rendere più evidente il confronto col comportamento delle cellule *di seconda specie*, riportare qui alcune delle serie di misure che noi abbiamo effettuate sulle cellule ordinarie facendo loro subire un ciclo completo di riscaldamento e raffreddamento.

Ecco, per esempio, i risultati ottenuti con cinque cellule, una costruita dal Müller-Uri di Braunschweig e quattro costruite da noi; riscaldamento e raffreddamento duravano ciascuno all'incirca trenta minuti primi:

1) L. Amaduzzi, Il Selenio. Bologna, 1904, pagg. 64 e seguenti.

Cellula Müller Uri		Cellula N. IV		Cellula N. V		Cellula N. VI		Cellula N. VII	
T	R Ohm	T	R Ohm	T	R Ohm	T	R Ohm	T	R Ohm
19°,3	40.000	18°,5	125.000	20°,0	12.830	21°,0	2.370	19°,0	124.000
30,6	32.000	24,8	101.000	29,4	9.400	28,0	2.310	26,0	102.000
42,0	25.000	35,0	71.000	34,4	7.800	35,0	2.140	42,6	54.000
55,0	18.000	43,4	51.100	41,0	6.000	42,0	1.910	74,0	18.000
63,0	14.480	51,5	36.600	50,0	4.200	50,4	1.550	81,4	13.000
70,5	11.040	61,8	24.400	56,8	3.100	61,0	1.120	86,0	10.400
80,0	8.900	64,4	21.000	64,0	2.500	67,0	930	**87,0**	9.600
85,0	8.040	70,8	16.000	70,6	2.000	74,0	760	69,0	19.000
89,0	7.480	73,1	14.400	80,0	1.500	81,2	640	48,2	38.000
94,0	**7.390**	**78,4**	**11 800**	85,0	1.300	**85,4**	**580**	39,0	52.000
75,0	8.600	72,6	14.300	87,6	1.200	82,6	600	26,0	80.000
64,5	11.000	62,4	20.300	**93,0**	**1.000**	74,6	690	22,0	90.000
51,0	15.000	52,4	30.000	86,0	1.220	65,0	800		
42,0	18.060	47,2	37.000	81,2	1.320	60,4	870		
33,2	21.000	35,2	58.000	68,0	2.100	53,0	970		
20,0	25.800	25,0	82.000	63,0	2.476	48,0	1.040		
				56,0	3.100	41,0	1.130		
				45,6	4.500	30,0	1.310		
				31,0	7.400	20,0	1.440		
				22,6	10.100				
				20,0	11.100				

Come si vede dall' ispezione dei numeri contenuti nella presente tabella il comportamento di queste cinque cellule se qualitativamente presenta delle analogie non ne rivela alcuna quantitativamente sebbene le quattro cellule da noi costruite IV, V, VI, VII siano state formate collo stesso selenio e preparate e ricotte nello stesso identico modo. Si deve dunque rinunciare per un corpo dal comportamento così variabile

come il selenio a formulare delle leggi quantitative e contentarsi invece di cogliere delle relazioni puramente qualitative.

Dalle misure effettuate noi concluderemo dunque che se è effettivamente vero che la resistenza elettrica del selenio *di prima specie* decresce coll'aumentare della temperatura, d'altra parte il coefficiente termico di tale resistenza varia da preparato a preparato ancorchè tutti siano stati costruiti colla stessa qualità di Selenio e ricotti alla stessa temperatura e per lo stesso intervallo di tempo. Quando però sopravviene il raffreddamento la resistenza aumenta più lentamente di quello che non sia diminuita durante il riscaldamento.

Se una cellula di prima specie già assoggettata ad un ciclo di riscaldamento e raffreddamento viene sottoposta ad un secondo ciclo simile al primo, si ottiene un ulteriore abbassamento della resistenza della cellula stessa.

Ecco i numeri relativi a due esempi scelti a caso fra le numerose serie di misure da noi effettuate:

Temperat.	Cellula N. V				Cellula N. VII			
	I Riscald.	I Raffredd.	II Riscald.	II Raffredd.	I Riscald.	I Raffredd.	II Riscald.	II Raffredd.
20°	**12.830**	11.000↑		**8.500**↑	**123.000**	96.000↑		**82.000**↑
30	9.000	7.700	8.000	6.200	87.500	70.000	73.500	62.000
40	6.200	5.500	5.800	4.700	58.400	49.500	54.200	46.500
50	4.200	3.850	4.000	3.400	42.000	35.800	38.600	34.000
60	2.900	2.650	2.800	2.600	30.000	26.300	28.000	24.500
70	2.050	1.900	2.000	1.900	20.500	19.000	19.900	17.800
80	1.500	1.400	1.500	1.400	13.500	13.500	13.500	13.500
90	1.180↓		1.180↓		8.800↓		8.800↓	

Se si prolunga la serie dei cicli di riscaldamenti e raffreddamenti successivi la resistenza può abbassarsi notevolmente, ma allora la cellula si deteriora, perde quasi totalmente il suo

effetto fotoelettrico e l'andamento della resistenza durante un raffreddamento finisce per coincidere sensibilmente coll'andamento della resistenza durante il riscaldamento precedente.

È importante notare che questo abbassamento di resistenza che, come abbiamo visto, si riscontra dopo uno o più cicli, viene, se non completamente, almeno in parte, a scomparire dopo un intervallo di tempo più o meno lungo a seconda della cellula che si considera; ogni cellula così, cui si sia fatta diminuire comunque la resistenza con uno o più cicli di riscaldamento e raffreddamento, col passare del tempo finisce per tendere ad assumere una certa resistenza che, quando la cellula venga abbandonata a se stessa, rimane quasi invariabile ed è caratteristica della cellula stessa.

Questo modo di abbassare la resistenza di una cellula mediante questi cicli assume, quando la cellula deve la sua resistenza elevata al passaggio di una corrente alternata, un'importanza considerevole poichè dà il mezzo di distruggere in un tempo relativamente breve il noto effetto della corrente alternante stessa.

Qualcuno sembra abbia osservato una differenza nel comportamento termico della resistenza elettrica delle cellule a selenio ordinarie se esse vengono riscaldate o raffreddate *più o meno rapidamente*. Noi abbiamo osservato che in generale non c'è alcuna differenza nel comportamento di una cellula ordinaria sia che essa sia riscaldata o raffreddata lentamente o rapidamente.

Ottenevamo il graduale riscaldamento ed il relativo raffreddamento mediante due correnti di acqua rispettivamente calda o fredda di velocità opportuna che per mezzo di un appropriato sistema di tubi penetravano nella stufetta che conteneva la cellula in esperimento e ne uscivano.

A conferma di quanto abbiamo detto riportiamo qui alcune cifre riferentisi alle cellule: Müller-Uri e N. V, avvertendo che per potere operare sempre nelle stesse condizioni di resistenza fra l'una e l'altra serie di esperienze abbiamo sempre aspettato che la cellula in esame raggiungesse la sua resistenza caratteristica di cui abbiamo già fatta menzione. Durante il

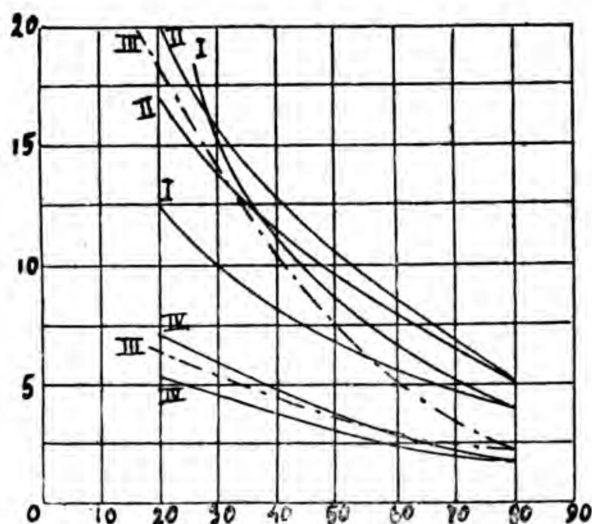
riscaldamento e il raffreddamento rapidi si aveva una variazione di temperatura di 5° circa al minuto primo, nell'altro caso invece una variazione di circa 1° al minuto primo:

Temperat.	Cellula Müller-Uri				Cellula V			
	Lento		Rapido		Lento		Rapido	
20°	40.100	26.000	40.100	25.500	12.830	11.100	12.700	11.030
30	32.500	22.000 ↑	32.000	21.800 ↑	9.400	7.400 ↑	9.350	7.650 ↑
40	26.500		25.850		6.000	5.000	5.850	4.650
50		15.000		14.900	4.200	3.500		
60	15.500	12.000	15.000	12.000	3.000	2.600	2.910	2.510
70	11.500	9.500	11.000	9.450	2.000	2.000	2.100	1.800
80	8.900 ↓	7.900	↓	7.840	1.500 ↓	1.350	1.450 ↓	1.350
90	7.800		7.750		1.000		950	

Crediamo degno di menzione il fatto da noi osservato che una cellula, la quale non era stata ricotta per un tempo sufficiente alla completa trasformazione del selenio e non aveva avuto così una *formazione* stabile, mentre si comportava normalmente per riscaldamenti e raffreddamenti rapidi, non si condusse così per un riscaldamento e raffreddamento *lenti* e in quest'ultimo caso il comportamento isteretico assunse proporzioni considerevolmente maggiori che d'ordinario. Completandosi però forse la ricottura con tale trattamento lento, il comportarsi di detta cellula fu in seguito regolare come apparisce dal grafico qui sotto riportato:

Sulle ascisse sono riportate le temperature in gradi, sulle ordinate le resistenze in migliaia di Ohm; le curve I e II si riferiscono a due serie di operazioni rapide (variazione di $\pm 5°$ al minuto primo), la curva III si riferisce ad un riscaldamento e raffreddamento lenti (variazione di $\pm 1°$ al minuto primo), finalmente la curva IV si riferisce a due operazioni,

una rapida ed una lenta, che diedero gli identici risultati, dopo il trattamento corrispondente alla curva III.



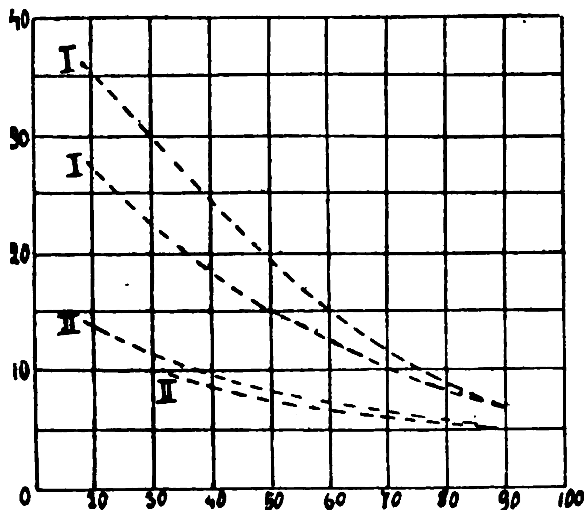
L' illuminazione di una cellula al selenio *di prima specie* non altera molto l' andamento generale del fenomeno, è solo degno di nota che quando il selenio di *prima specie* è illuminato la temperatura ha un effetto meno marcato.

Se infatti calcoliamo il coefficiente termico della resistenza elettrica al buio e alla luce otteniamo i seguenti numeri:

Cellula	Coefficiente termico al buio	Coefficiente termico alla luce	Rapporto
Müller-Uri	0,010	0,009	1,1
II	0,007	0,006	1,1
IV	0,004	0,003	1,3
V	0,013	0,011	1,2
VI	0,007	0,006	1,1
VII	0,009	0,007	1,3

Come si vede il coefficiente termico del selenio illuminato è sempre minore del corrispondente pel selenio al buio; non possiamo non far rimarcare ancora una volta la differenza notevole quantitativa che si ha nel comportamento di cellule pur fabbricate nello stesso identico modo.

Per dare un'idea dell'andamento generale della resistenza elettrica di queste cellule colla temperatura al buio e alla luce riportiamo qui le curve relative alla cellula Müller-Uri: La curva I si riferisce al comportamento di detta cellula tenuta allo scuro, la curva II si riferisce al suo comportamento quando è illuminata da un arco (a corrente alternante a 50 Volta) posto alla distanza di due metri:



Passando a studiare il comportamento delle cellule *di seconda specie* abbiamo trovato in esse una differenza abbastanza marcata di comportamento rispetto alle variazioni di temperatura. In linea generale si può affermare che il comportamento isteretico è molto meno marcato per esse e con successivi riscaldamenti si riduce quasi nullo.

Riportiamo qui per maggiore chiarezza i numeri relativi ad un certo numero di queste cellule *di seconda specie*. Nella

quinta colonna è riportato il numero d'ordine delle operazioni cui venne sottoposta la cellula, avvertiamo che fra un'operazione e l'altra si è sempre aspettato un intervallo di tempo sufficiente e che la cellula prendesse una resistenza stabile.

Cellula N.°	Resistenza a 20°	80°	di nuovo a 20°	Numero d'ordine dell'operazione	Coefficiente termico medio
3	19,5	7,4	16,7	I	0,009
»	19,6	6,4	16,8	II	
»	17,8	6,5	18,1	III	
»	17	7.4	17	IV	
»	17,2	7.5	17,2	V	
4	36,5	25	34,9	I	0,005
»	36	25	36	II	
»	36	25	36	III	
5	8,2	4,5	6,5	I	0,007
»	8,5	5	8,0	II	
»	8,2	5,1	8,2	III	
»	8,2	5,1	8,2	IV	
6	13,8	10,03	12,7	I	0,009
7	7,4	3,3	7,3	I	0,009
»	7,3	3,8	7,3	II	
8	7,2	4,3	6	I	0,006
»	7,0	5	7,0	II	
9	4,5	3,19	3,5	I	0,004
»	3,8	2,9	3,2	II	
»	3,5	2,9	3,5	III	

È notevole l'abbassamento di resistenza che durante i mesi d'estate hanno subito queste cellule *di seconda specie;* basta

pensare che in maggio dello scorso anno le resistenze di queste cellule alla temperatura ordinaria erano rispettivamente:

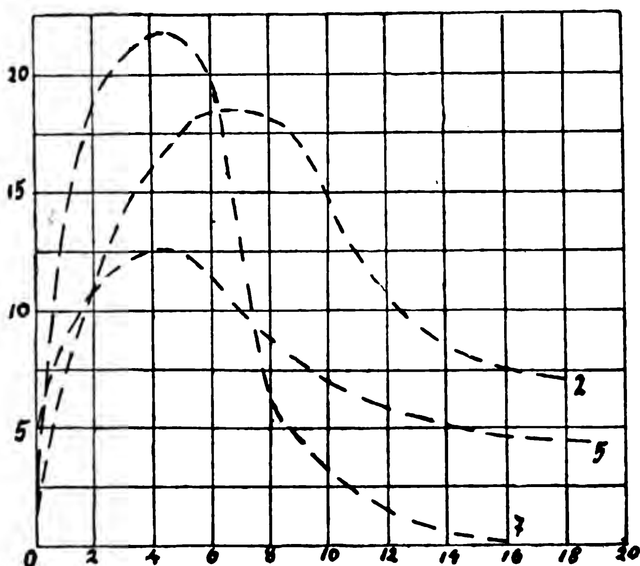
Cellula N.	3	5	6	7	8	9
Resistenza: Ohm	195	89	1450	45	48	23

Dall'esame dell'ultima colonna della precedente tabella ove sono riportati i coefficienti termici medi della resistenza elettrica di questo selenio *di seconda specie* risulta chiaro che questo coefficiente è molto simile a quello trovato pel selenio *di prima specie.*

Passiamo ora ad esaminare l'azione della corrente alternata in dipendenza della temperatura; l'insieme delle nostre ricerche conduce al risultato che l'azione della corrente alternante dipende in modo notevole dalla temperatura ed in guisa assolutamente diversa a seconda della specie del selenio che si cimenta; l'effetto finale poi è diverso a seconda che l'applicazione della corrente alternante avviene a bassa o ad alta temperatura e a seconda che a questa applicazione segue un riscaldamento o un raffreddamento.

Una cellula *di seconda specie* ha anche alla temperatura ordinaria una resistenza molto bassa (vedi tabella precedente); sottoposta, sempre alla temperatura ordinaria, ad una corrente alternata di conveniente voltaggio, (per 10", come nelle esperienze precedenti) la resistenza sale di colpo a valori molto elevati, come abbiamo già riferito altrove. A temperatura più elevata, per esempio a 90°, avviene egualmente un aumento di resistenza pel passaggio della corrente alternante, però il massimo della resistenza non si ottiene subito, come alla temperatura ordinaria, ma solo alcuni minuti appresso; dopo di che, se si mantiene costante la temperatura, la resistenza ricade spontaneamente fino ad un valore talvolta più basso di

quello assunto dopo il primo aumento provocato dalla corrente alternante. Il grafico seguente rappresenta l'andamento del fenomeno per le tre celle N. 2, 5 e 7. Sull'asse delle ascisse sono riportati i tempi in minuti primi a partire dal momento in cui è cessata l'applicazione della corrente alternante e sulle ordinate sono riportate le resistenze corrispondenti, in migliaia di Ohm:



La corrente alternata applicata aveva un voltaggio, variabile da cellula a cellula di 50-80 Volta.

Nel caso di un aumento di resistenza prodotto dalla corrente alternante a temperatura ordinaria, se si procede poscia ad un riscaldamento, una cellula *di seconda specie* si comporta in modo del tutto analogo a quella cellula di ricottura incompleta di cui abbiamo parlato più sopra: la resistenza cala col riscaldamento, ma un successivo raffreddamento *non ripristina* più la resistenza primitiva. Così è che un riscaldamento da 20° a 80° durato appena, per esempio, 20' distrugge o totalmente o almeno in grandissima parte l'aumento di resistenza di una cellula prodotta dal passaggio della corrente alternante.

Ecco alcuni numeri:

Cellula	Resistenza a 20°		Escursione di temperatura	Durata dell'escursione	Resistenza finale
	iniziale	dopo il passaggio della corr. alternante			
3	19	31000	20°→ 80°→ 19°	60'	14
4	36	41000	20 → 60 → 20	45'	200
5	8,5	29000	19 → 74 → 21	60'	290
7	7,5	6100	20 → 92 → 21	30'	100
8	7	19000	19 → 85 → 19	30'	29
9	3,9	13400	20 → 86 → 20	19'	4,5
11	16	31000	20 → 80 → 18	25'	18

Quanto alle cellule *di prima specie* nulla di anormale si verifica a temperature superiori all'ordinaria, cioè: la resistenza assunta dopo il passaggio della corrente alternante rimane per parecchio tempo la stessa, purchè la temperatura rimanga costante.

È da notare però che anche per queste cellule un riscaldamento ed un raffreddamento annullano l'effetto prodotto dalla corrente alternata anche se questa venne applicata alla temperatura ordinaria.

Eccone alcuni esempi:

Cellula	Resistenza		Escursione di temperatura	Durata dell'escursione	Resistenza finale
	iniziale	dopo il passaggio della corr. alternante			
Müller-Uri	40.000	85.000	20°→ 80°→ 20°	60'	45.000
I	7.840	27.000	20°→ 80°→ 19°	30'	8.000
II	8.400	9.000	20°→ 86°→ 19°	30'	8.000
III	660	2,900	20°→ 90°→ 20°	30'	700

Infine noteremo che se una cellula *di prima specie* viene raffreddata subito dopo aver aumentata la sua resistenza col passaggio a temperatura elevata di una corrente alternante, la sua resistenza cresce rapidissimamente e corrispondentemente l'effetto fotoelettrico aumenta di molto.

Nell'intento di portare un po' di luce su queste diminuzioni stabili di resistenza che le cellule al selenio di ambedue le specie, trattate colla corrente alternante, subiscono per delle variazioni di temperatura, noi abbiamo intrapreso una lunga serie di misure, che qui riferiamo sommariamente, per vedere se tali diminuzioni di resistenza fossero dovute ad un eventuale passaggio del selenio per uno stato allotropico intermedio, passaggio che fosse accompagnato, come quello notato recentemente dal Marc [1]) a più alte temperature, da sviluppo od assorbimento di calore. Due metodi diversi sono stati da noi impiegati:

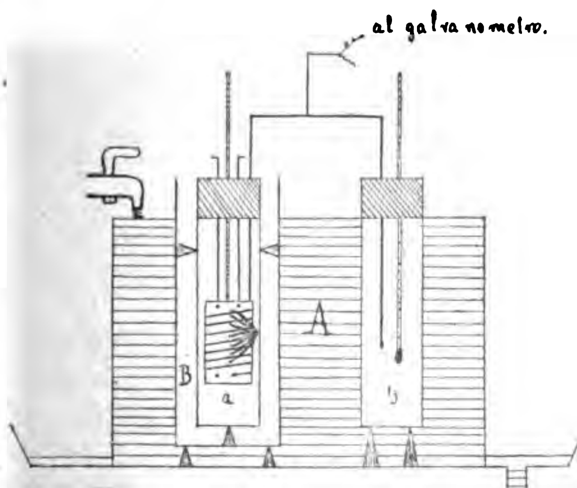
Dapprima abbiamo sperimentato rinchiudendo le nostre cellule in una stufetta ad acqua nell'interno della quale si trovava una pila termoelettrica di 10 elementi ferro-costantana, della quale una serie di saldature era in contatto collo strato di selenio formante le cellule, l'altra col bulbo di un termometro destinato ad indicarci la temperatura dell'interno della stufetta; la pila termoelettrica era unita ad un galvanometro Deprez-D'Arsonval, di resistenza eguale a 4 Ohm, munito di shunt regolabile entro grandi limiti. Le esperienze si conducevano così: Si riscaldava lentamente la stufetta portandola fino a 90° circa e di minuto in minuto si determinava la temperatura segnata dal termometro e la differenza fra questa e la temperatura del selenio dataci dalla pila termoelettrica; quindi, introducendo una conveniente corrente di acqua fredda nella stufetta, si produceva un raffreddamento con una velocità eguale a quella del riscaldamento. Orbene l'andamento delle indicazioni della pila termoelettrica fu dei più regolari, mai ebbero a riscontrarsi quelle anomalie che sogliono rivelare un assorbimento od un'emissione di calore e ciò malgrado

1) Zeit für anorg. Chemie, 1906.

che il susseguirsi di tali cicli di operazioni non abbia mai mancato di produrre il solito notevole abbassamento di resistenza e nonostante che la pila termoelettrica fosse montata in guisa da poterci segnalare delle differenze anche di 0°,01 di temperatura.

Questo metodo però presentava l'inconveniente di dover procedere a riscaldamenti e a raffreddamenti molto lenti perchè il selenio avesse tempo a seguire le variazioni di temperatura dell'ambiente. Siamo allora ricorsi specialmente pel periodo di raffreddamento che era più difficile ad ottenere colla voluta lentezza, ad un altro metodo e precisamente al seguente:

La cellula veniva chiusa nel mezzo di un recipiente cilindrico metallico e a pareti sottilissime *a*, contro la superficie libera del selenio era leggermente premuta una serie di saldature di una pila termoelettrica di 8 elementi ferro-costantana unita al solito galvanometro, l'altra serie di saldature era contenuta in un recipiente *b* cilindrico metallico analogo a quello contenente la cellula. Quest'ultimo recipiente *b* si poneva in un recipiente molto maggiore A ripieno d'acqua continuamente rinnovantesi per avere una temperatura possibilmente costante. Ciò posto, un'esperienza si conduceva così: Si prendeva il recipiente *a* contenente la cellula e mediante la



solita stufetta lo si portava ad una temperatura di circa 98°, si aspettava finchè il selenio avesse raggiunto la temperatura segnata dal termometro *t* annesso al recipiente e poi rapidamente lo si introduceva in un vaso cilindrico B costituito di latta sottilissima e immerso nel solito recipiente A; quindi si cominciavano a leggere le indicazioni della pila termoelettrica ad intervalli regolari di tempo (per lo più di 10 in 10 secondi); noi osservavamo così l'andamento del raffreddamento del selenio misurando la differenza di temperatura fra il selenio e l'acqua corrente nel recipiente A.

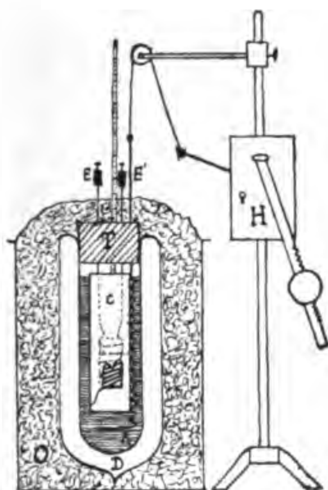
L'esame delle curve di raffreddamento ottenute ci mostrò all'evidenza l'assoluta regolarità del raffreddamento del selenio e la nessuna traccia nelle curve di quegli arresti e di quelle dentellature che rivelano il compiersi di un processo eso- o endotermico nella sostanza che si raffredda. Per osservare il fenomeno durante un riscaldamento si poneva *b* in un recipiente contenente acqua bollente e poi quando si era sicuri che l'interno avesse assunto la temperatura del bagno si portava in quest'ultimo anche il recipiente B e si facevano le stesse osservazioni che pel raffreddamento.

Avendo ripetuto le esperienze descritte un grandissimo numero di volte con tutte le cellule di cui potevamo disporre, spingendo la sensibilità della pila termoelettrica (mediante lo shunt) anche al di là del 0°,01 per tutto l'intervallo di temperatura considerato e non avendo potuto riscontrare alcuna anormalità nelle curve di raffreddamento e di riscaldamento ci riteniamo autorizzati ad affermare che fra i 20° ed i 98° mentre avvengono per tutte le cellule trattate preventivamente colla corrente alternante (siano esse di prima o di seconda specie) delle notevolissime variazioni di resistenza, non accadono certo nel selenio che le costituisce dei processi di trasformazione accompagnati da sviluppo o da assorbimento di calore, naturalmente entro i limiti di sensibilità da noi usati.

Sincerato ciò siamo passati a studiare se il passaggio della corrente alternante nelle cellule al selenio non provocasse un processo di trasformazione accompagnato da fenomeni termici speciali all'infuori del calore Joule. Facendo passare la corrente alternante attraverso una cellula a contatto col bulbo

di un termometro ci eravamo accorti di un notevole sviluppo di calore che, così ad un esame sommario, ci era sembrato superiore a quello che doveva svolgersi per l'effetto Joule. Ci proponemmo allora di studiare il fenomeno dal punto di vista calorimetrico in condizioni ben definite e tali da evitare gli inconvenienti di un troppo forte riscaldamento [1]).

La cellula venne rinchiusa in una scatola *c* formata da lamiera sottilissima di argentana e il tutto venne sommerso



in un peso noto (185 grammi) di acqua distillata contenuta in un tubo di Dewar D chiuso superiormente da un tappo T attraverso il quale passavano un buon termometro diviso in ventesimi di grado che veniva letto con un cannocchiale alla distanza di due metri e i due elettrodi della cellula in esame; un agitatore formato da una spirale metallica A, mossa da un congegno automatico a pendolo H serviva a mantenere uniforme la temperatura nell'interno del tubo Dewar il quale per maggior precauzione era immerso in un vaso di vetro O ripieno di ritagli minuti di carta.

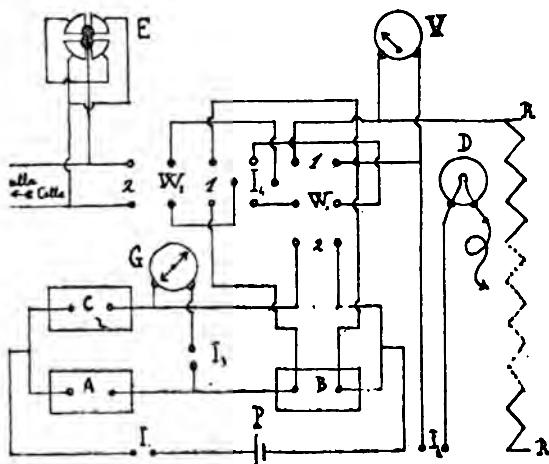
1) Se non si favorisce lo scambio di calore coll'esterno, il calore prodotto dall'effetto Joule aumenta la temperatura della cellula e così ne abbassa la resistenza notevolmente, la corrente allora può raggiungere intensità tali da produrre in qualche punto della cellula delle fusioni che la rovinano.

Per poter usare un simile dispositivo come calorimetro procedemmo anzitutto alla determinazione dell'equivalente in acqua di esso; per far ciò ponemmo nell'interno della scatola, che doveva poi contenere la cellula, delle spiraline di argentana e di platinoide di lunghezze diverse, tutte però delle stesse dimensioni medie e montate su tavolette di lavagna identiche a quelle delle nostre cellule, e le abbiamo fatte attraversare da correnti di intensità determinate con cura con un milliamperometro Siemens. Si comprende facilmente come, note le resistenze delle varie spirali, l'intensità delle correnti che le attraversavano e gli aumenti di temperatura segnati dal termometro, fosse possibile giungere alla determinazione dell'equivalente in acqua del nostro calorimetro. Il metodo, purchè si usino tutte le minuziose precauzioni necessarie alle misure calorimetriche, è più preciso di quanto avremmo osato sperare, avendo, in numerose misure fatte in differenti condizioni con corrente alternante e con corrente continua, ottenuti dei risultati abbastanza concordanti, come si può rilevare dai numeri che riportiamo qui come esempio:

Metallo della spirale	Resistenza (ohm)	Intensità (amp.)	Durate (m")	Escursione del termometro (gradi cent.)	Equivalente in acqua (gr.)
Platinoide	9,0	0,745	600	7°,82 — 20°,74	61,5
»	13,0	0,539	600	9°,75 — 11°,86	62,7
»	13,0	0,438	900	9°,47 — 11°,65	62,1
Argentana	4,0	0,885	600	9°,17 — 11°,00	61,5
»	13,0	0,553	600	10°,05 — 12°,35	63,8
»	4,0	0,733	900	9°,92 — 11°,80	61,9

Volendo, durante le esperienze che seguono, misurare il voltaggio e l'intensità efficaci della corrente alternante applicata alla cellula e la resistenza di questa rispetto alla corrente continua ed alla corrente alternante, abbiamo dovuto modificare alquanto il dispositivo descritto nella nostra Nota prece-

dente. Dopo varie modificazioni la disposizione sperimentale definitiva risultò quella esposta nel disegno schematico qui riportato: i quattro lati del solito ponte di Wheatstone sono formati dalla cellula in esame e dai tre sistemi di cassette di resistenze ABC; P è una pila normale alla Daniell, G il solito galvanometro di Siemens altrove ricordato, I_1 ed I_2 due interruttori a mercurio: questo per la misura della resistenza della cellula colla corrente continua. Per misurare la resistenza delle cellule colla corrente alternante, dopo vari tentativi, siamo ricorsi al metodo di sostituzione che consentiva di fare con-



temporaneamente la misura dell'intensità della corrente attraversante le cellule durante le misure calorimetriche.

La manovra per compiere queste determinazioni si effettuava così: Si chiudevano gli interruttori I_2 ed I_4 e si portavano i commutatori W_1 nella posizione 1 e W_2 rispettivamente nelle posizioni 1 e 2 a seconda che s'inserivano nel circuito il sistema di cassette di resistenza B oppure la cellula da cimentare.

L'intensità della corrente veniva determinata mediante un elettrodinamometro termico D del Duddel della Cambridge Scientific Instrument Company, munito di convenienti shunts

e debitamente campionato in precedenza colla corrente continua.

Il voltaggio della corrente applicata alla cellula veniva variato prendendo contatto su una resistenza nota RR' sulla quale era applicata la corrente alternata stradale a 110 Volta e determinata all'ingrosso con un voltmetro V a filo caldo dell'Olivetti; la differenza di potenziale direttamente agli elettrodi della cellula veniva misurata con un elettrometro a quadranti E usato idiostaticamente.

È bene avvertire che principalmente a causa della continua variazione della resistenza prodotta dal passaggio della corrente alternante queste misure calorimetriche riescono oltremodo difficili e non si può pretendere nei numeri che una concordanza approssimativa.

Ecco alcune cifre scelte fra le numerosissime serie ottenute: nella prima colonna è riportato il numero distintivo e la specie della cellula cimentata, nella seconda colonna la media delle intensità efficaci della corrente alternata che ha attraversata la cellula durante la misura, media calcolata in base alle misure di detta intensità compiute di minuto in minuto, nella terza il calore sviluppato quale risulta direttamente dalla misura calorimetrica, nella quarta il calore Joule svolto calcolato, nell'ultima finalmente la durata in minuti primi di ciascuna esperienza:

Cellule		Intensità media Ampère	Calore svolto in piccole calorie misurato	Calore svolto in piccole calorie calcolato	Durata
I Specie	IV	0,0287	32,5	34,0	12'
»	V	0,0418	25,1	24,9	15'
II Specie	4	0,0018	32,3	29,5	11'
»	»	0,0060	189,4	187,0	15'
»	6	0,0070	23,2	25,1	8'
»	»	0,0060	260,3	268,4	20'
»	»	0,0005	36,7	35,8	15'
»	7	0,2100	116,8	117,5	10'
»	»	0,0060	45,1	42,6	10'
»	»	0,0045	85,8	85,8	10'
»	»	0,0039	142,1	141,3	15'
»	8	0,0287	25,4	25,3	11'
»	»	0,0050	40,0	42,3	14'
»	9	0,0500	49,8	47,2	5'
»	11	0,0080	74	75	15'
»	»	0,0040	278,7	273,6	20'

Le cellule 4, 6, 7, 8 e 11 vennero cimentate a diversi stadi di resistenza e a vari voltaggi appunto per poter scoprire se in uno di questi avvenisse una trasformazione accompagnata da fenomeni termici. Però da quanto precede ci pare si possa con sufficiente sicurezza asserire che, tanto per le cellule *di prima specie* quanto per quelle di seconda specie la variazione di resistenza prodotta dal passaggio della corrente alternante non è accompagnata da alcuno sviluppo o assorbimento di calore sensibili.

Più volte durante le precedenti misure avevamo constatato che le cellule sia di prima che di seconda specie non seguivano affatto la legge di Ohm in quanto che al crescere del voltaggio applicato alla cellula la resistenza di questa diminuisce sensibilmente'. Il fatto era già stato notato dall'A-

dams[1]) il quale però ne parla solo incidentalmente e non ne fa oggetto di ricerche speciali; ci è sembrato interessante di istituire delle misure apposite sopra questo comportamento usando allo scopo la disposizione precedentemente descritta che permetteva la misura della resistenza per la corrente continua nei due sensi e per la corrente alternante rispetto a voltaggi noti con sicurezza proprio agli elettrodi della cellula. Per ottenere differenti voltaggi di corrente continua, alle estremità della resistenza R R' si attaccava una batteria di 50 elementi di accumulatore Tudor. Queste esperienze vennero effettuate su tutte le cellule alla temperatura ordinaria dopo di aver elevata la loro resistenza al massimo possibile con l'applicazione per un certo tempo della corrente alternante a 110 Volta; le resistenze iniziali quindi di queste cellule qui riportate sono le massime che esse possono raggiungere con tale trattamento. Ecco alcuni dei risultati ottenuti:

Cella N. 4 di seconda specie			Cella Müller-Uri di prima specie					
			al buio			alla luce		
Voltaggio	Resistenza corrente continua	Resistenza corrente alternante	Voltaggio	Resistenza corrente continua	Resistenza corrente alternante	Voltaggio	Resistenza corrente continua	Resistenza corrente alternante
1	13400	—	1	170000	—	1	17000	—
8	12500	12290	11	120000	—	13	14800	14800
18	11850	11800	22	100000	100000	21	13400	13400
27	11400	11460	30	88000	89000	28	12300	12200
36	10800	10770	38	80000	79000	36	11400	11400
45	10600	11570	46	73000	74000	44	10600	10600
54	10250	11300	56	68000	68000	53	9900	9800
64	10100	10100	64	64000	65000	61	9400	9400
72	10000	10000	84	56000	56000	69	9000	9100
82	9950	9950	96	52000	52000	78	8850	8750
92	9900	9900						
100	9900	9000						

1) Proc. Roy. Soc. 25, 1876, pag. 118.

Per le altre cellule ci siamo contentati di un numero minore di misure visto che dal punto qualitativo l'andamento del fenomeno era lo stesso. Ad ogni modo crediamo opportuno riferire i risultati ottenuti anche colle altre. Fra le altre misure riportiamo anche quelle compiute sulla cella Müller-Uri e sulle 6 ed 8 ad una resistenza meno elevata onde mostrare come tutto il fenomeno dipenda dalla resistenza iniziale della cellula :

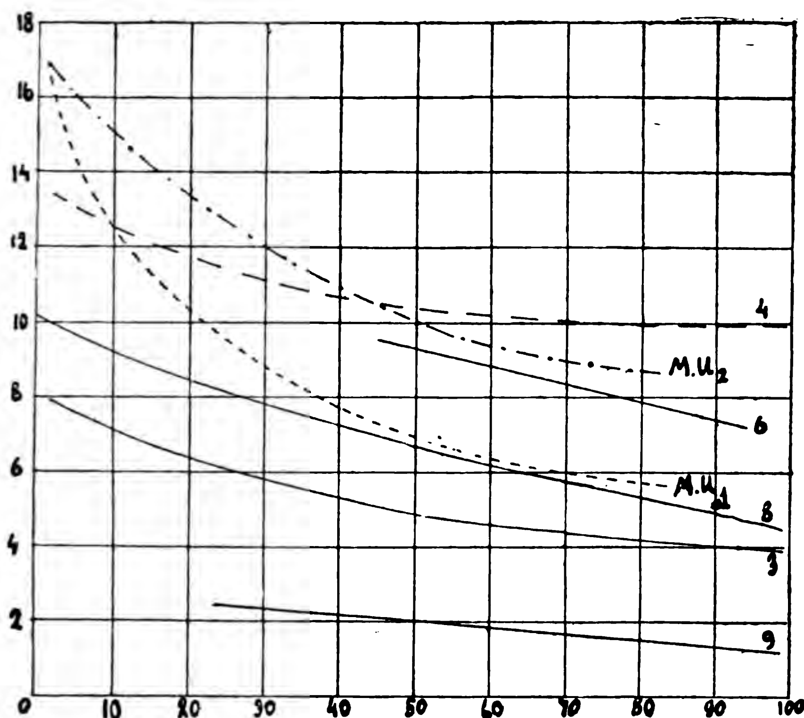
I.

Cellula N. 8			Cellula N. 6			Cellula N. 11			Cellula N. 9			Cellula N. 3		
Volt.	res. corr. cont.	res. corr. alt.	Volt.	res. corr. cont.	res. corr. alt.	Volt.	res. corr. cont.	res. corr. alt.	Volt.	res. corr. cont.	res. corr. alt.	Volt.	res. corr. cont.	res. corr. alt.
1	100000		45	9500	9500	45	1000	1000	22	25900	25800	22	76800	76750
14	75000	75000	54	9000	9000	64	920	920	45	21000	21000	45	69200	69200
45	70000	70000	64	8700	8700	72	800	800	68	16000	17000	68	55000	55050
68	60500	60000	72	8250	8200	82	750	700	100	12500	13000	100	40000	39900
100	46500	45000	82	7650	7600									
			92	7450	7450									

II.

	10 Volta		50 Volta		100 Volta	
	R. cont.	R. alt.	R. cont.	R. alt.	R. cont.	R. alt.
Müller-Uri	—	—	60000	59900	42500	42500
N. 4	11850	11850	11300	11280	9950	10000
N. 6	—	—	9500	9480	7450	7450
N. 8	75000	74940	70010	70000	46500	46500
N. 11	—	—	1000	1025	950	945

Come si vede in tutte le cellule da noi studiate, a qualunque grado di resistenza si trovassero, sempre, coll'aumentare del voltaggio della corrente applicata per la misura della resistenza, si è trovata una diminuzione di quest'ultima. Riportiamo qui in un grafico i risultati ottenuti: Sulle ascisse sono riportati i valori del voltaggio applicato in Volta; sulle ordinate poi sono riportate le resistenze in modo che per le curve 3, 6, 8, 9, e M U_1 ogni centimetro corrisponde a 20.000 Ohm, per le curve 4 e M U_2 ogni centimetro corrisponde a 2000 Ohm; la curva MU_1 si riferisce alle esperienze compiute al buio, la curva MU_2 invece ad esperienze fatte alla luce.



Il grafico mostra come questa diminuzione sempre molto regolare, non è la stessa per tutte le cellule; in alcune la diminuzione della resistenza coll'aumentare del voltaggio ha un andamento quasi rettilineo, per altre invece un andamento

affatto diverso. Potrebbe forse dubitarsi che questa diminuzione di resistenza fosse dovuta ad un riscaldamento prodotto dalla corrente stessa, ma questa spiegazione va assolutamente rigettata quando si pensi:

1° che la diminuzione riscontrata corrisponderebbe ad un riscaldamento enorme rispetto a quello che realmente abbiamo misurato applicando sulle cellule in esperimento la pila termoelettrica precedentemente descritta;

2° che la diminuzione in parola si manifesta di colpo appena chiuso il circuito e non si svolge gradatamente;

3° che se si misura la resistenza della cellula in queste condizioni: prima a 10 Volta, poi a 50, poi a 100 e infine di nuovo a 10 Volta si ritrova esattamente per quest'ultimo voltaggio la resistenza riscontrata alla prima operazione.

Queste misure ripetute numerose volte con grande rapidità (il dispositivo da noi adottato ci permetteva di compiere la misura di resistenza col metodo di sostituzione in meno di 10" grazie alla prontezza ed all'aperiodicità completa dell'elettrodinamometro termico del Duddel ed al sistema di commutatori da noi impiegato) diedero sempre risultati notevolmente concordanti; esse ci permettono dunque di affermare che la diminuzione di resistenza presentata dalle cellule al selenio col crescere del voltaggio non è dovuta ad un effetto secondario termico, ma è dovuto effettivamente al modo speciale con cui il selenio conduttore conduce la corrente.

Al diminuire della resistenza dovuta al crescere del voltaggio nelle cellule ad alta resistenza siano esse di *prima specie* o provenienti da cellule *di seconda specie*, corrisponde una diminuzione anche della sensibilità alla luce.

Riportiamo qui a titolo d'esempio alcuni numeri:

Voltaggio	Cellula Müller Uri	Cellula N. 7	Cellula N. 8	Cellula N. 9
22	0,90	0,70	0,40	0,44
45	0,87	0,65	0,38	0,42
68		0,60	0,32	0,30
100	0,85	0,55	0,30	0,28

L'aumento della resistenza pel passaggio di una corrente alternante non è dovuto esclusivamente all'alternatività della corrente stessa perchè anche la corrente continua produce lo stesso effetto (benchè in grado molto minore) a qualunque grado di resistenza si trovi precedentemente la cellula. Solo è da notare che le misure di resistenza dopo un trattamento colla corrente continua sono rese molto difficili a bassi voltaggi dalla presenza di una forte corrente come di polarizzazione e non si possono effettuare colla corrente alternante causa la piccola sensibilità dell'elettrodinamometro; perciò bisogna ogni volta aspettare un tempo conveniente affinchè la presenza di questa corrente parassita non turbi più la misura.

Ecco per esempio alcuni numeri relativi a qualche cellula di seconda specie:

Cellula	Resistenza iniziale	Voltaggio corrente continua	Resistenza finale
4	45	95	890
»	890	80	1000
5	825	95	1470
»	1470	95	1491
8	266	95	560
»	280	60	295
11	380	95	3000
»	3000	95	3200

La corrente continua è stata applicata ogni volta per i soliti dieci secondi.

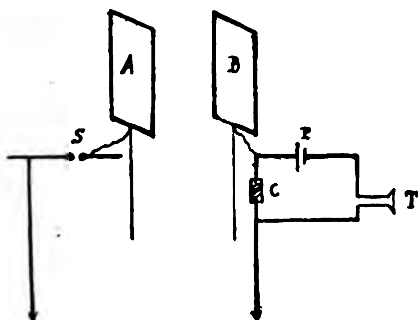
Su questa specie di corrente di polarizzazione ci riserbiamo di ritornare in appresso quando siano ultimate alcune esperienze in proposito che abbiamo in corso. Fin d'ora possiamo però riferire che una cellula inserita in un circuito percorso da una corrente alternante sembra produrre un sensibile spostamento di fase che si può abbastanza bene rilevare coll'uso della disposizione detta dei tre voltmetri.

Prima di chiudere questa esposizione dei risultati da noi ottenuti ci sembra non privo di interesse riportare qui alcune esperienze da noi istituite per studiare il comportamento delle nostre cellule sotto l'azione delle scariche di una macchina elettrostatica.

Se si inserisce la cellula in esame nel circuito che congiunge le armature esterne dei due condensatori di una macchina Whimshurst e si fa avvenire la scarica fra le armature interne con una distanza esplosiva di circa 20 millimetri, si ottiene un aumento brusco di resistenza notevolissimo: la cellula N. 9 che aveva inizialmente la resistenza di appena 4, 5 Ohm salì di colpo a 87.000 Ohm, la cellula N. 3 da 17,4 a 215.000 Ohm e finalmente una di 8000 Ohm di resistenza salì dopo tre scariche a 100.000.000 di Ohm! In tutti questi casi l'effetto fotoelettrico si invertì coll'aumento della resistenza (erano tutte e tre cellule *di seconda specie*) e sempre senza sviluppo sensibile di calore.

Non è però necessario che la scarica avvenga direttamente dalla macchina sulla cellula; noi abbiamo esperimentato anche nel modo seguente: la cellula veniva inserita in *c* nel circuito di una pila P e di un telefono T; un estremo della cella veniva posto in comunicazione col suolo, e l'altro in comunicazione con una lamina metallica B isolata. Se in S si facevano scoccare delle scintille fra le sferette di uno spinterometro delle quali una era terra e l'altra in comunicazione con una lamina isolata A simile a B, si sentiva un rumore al telefono ad ogni scarica anche quando A e B distavano di un metro ;

il suono dato dal telefono era principalmente dovuto alla variazione di resistenza della cellula poichè dopo un certo nu-



mero di scariche esso cessava e la cellula portata al ponte mostrava aver raggiunto una resistenza enorme.

Riassumendo quanto venne su esposto potremo concludere così:

1) Una cellula *di prima specie*, sottoposta ad un riscaldamento e poi successivamente ad un raffreddamento, diminuisce di resistenza durante il riscaldamento, ma non riprende col raffreddamento la primitiva resistenza se non dopo un tempo più o meno lungo (dalle 12 alle 24 ore). Una cellula *di seconda specie* presenta questo comportamento isteretico in modo molto meno marcato e dopo due o tre cicli di riscaldamenti e raffreddamenti non lo presenta più,

2) Una serie di questi cicli produce in definitiva sulle cellule *di prima specie* un forte abbassamento di resistenza, questa però non scende mai al di sotto di un certo valore; in queste condizioni la cellula perde il comportamento isteretico e diminuisce di molto la sua sensibilità alla luce; dopo un certo tempo però la resistenza ritorna ad un certo valore fisso caratteristico della cellula stessa,

3) La durata del ciclo non ha influenza sul fenomeno purchè la ricottura della cellula sia stata completa,

4) Il coefficiente termico di resistenza del selenio delle due specie è sensibilmente lo stesso; per quello *di prima specie* è maggiore al buio che alla luce,

5) L'applicazione per 10" di una corrente alternante di conveniente voltaggio è accompagnata anche a temperature fra 90° e 100° da un aumento di resistenza pressochè istantaneo nelle cellule *di prima specie;* nelle cellule *di seconda specie* a questo aumento istantaneo fa seguito un aumento spontaneo che dura da 4 a 5 minuti primi, seguito poi da una forte diminuzione che riconduce la resistenza a valori molto bassi,

6) Una cellula di qualunque specie, cui si sia elevata la resistenza a temperatura ordinaria colla corrente alternante, se si sottopone ad un riscaldamento diminuisce di resistenza, ma ad un susseguente raffreddamento non ritorna più alla resistenza elevata di prima, in tal modo si può distruggere l'effetto della corrente alternante,

7) Durante queste variazioni di resistenza per effetto dei cicli di raffreddamento e riscaldamento e per effetto della corrente alternante non si hanno nel selenio di ambedue le specie nè sviluppo nè assorbimento sensibili di calore,

8) Le cellule al selenio ad alta resistenza non seguono la legge di Ohm: al crescere del voltaggio la resistenza diminuisce sia per la corrente alternante che per la corrente diretta; corrispondentemente l'effetto fotoelettrico diminuisce,

9) Anche una corrente diretta e la scarica di una macchina elettrostatica possono aumentare la resistenza di una cellula al selenio, specialmente quest' ultima. L' effetto della corrente continua è a parità di voltaggio minore di quello della corrente alternata.

SUL ROCCHETTO D'INDUZIONE.

Nota di O. M. CORBINO [1]).

Il principio fondamentale su cui riposa il funzionamento del rocchetto di induzione è rimasto immutato da Rumkorff e Fizeau in poi, malgrado i perfezionamenti costruttivi arrecati all'apparecchio più per suggerimento della pratica che per risultato della teoria, ancora imperfettamente stabilita.

Siamo quindi ancora all'originale rottura del circuito primario avvolgente un nucleo magnetico aperto, con l'attenuazione degli effetti dovuti alla scintilla primaria mercè la produzione della rottura in un liquido isolante e l' inserzione del condensatore. Nè dall'impiego razionale di tutte le nozioni acquisite si può sperare, nella costruzione del rocchetto, di oltrepassare i risultati conseguiti dal Klingelfuss col suo trasformatore a scintille che si presenta già cosi meravigliosamente progredito rispetto ai modelli anteriori.

A eliminare l' inconveniente della scintilla primaria rivolge la sua attenzione, in uno studio recentissimo, l' Ingegnere Lori [2]), suggerendo due dispositivi di cui il secondo permetterebbe inoltre di ricorrere a un circuito magnetico chiuso.

Il primo artificio consiste nel caricare un condensatore e scaricarlo subito dopo in un circuito contenente il primario del rocchetto. Questo dispositivo fu veramente già adottato da Norton e Lawrence [3]) e da Tesla [4]) che ne studiarono sperimentalmente l' efficacia. Il Lori si limita a ricercare teoricamente le condizioni più favorevoli per ottenere una forza e. m.

1) *Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana*, Vol. X, fasc. 5°, pag. 123, 1906.

2) Lori, *Atti A. E. I.* Vol. X, fasc. 3-4, pag. 42, 1906.

3) Norton e Lawrence, *Electrical World*, marzo 1897, pag. 327.

4) Tesla, *The Electrical Review*, sett. 1897, pag. 327.

d'induzione molto elevata, ma sarà dimostrato più in là che il calcolo del Lori conduce a un risultato inesatto.

Un secondo dispositivo consiste nell'utilizzare il magnetismo rimanente di un circuito magnetico chiuso, per mezzo di una serie di manovre eseguite periodicamente da un particolare commutatore girante, e per le quali viene prima magnetizzato in un certo senso il nucleo di ferro dolce, quindi soppressa gradualmente la corrente magnetizzante, e allora si lancia nel primario una corrente opposta, cui corrisponde la smagnetizzazione e la magnetizzazione inversa del nucleo. A questa variazione del flusso corrisponderebbe, secondo il Lori, una intensa f. e. m. di induzione; e siccome viene con ciò utilizzata la chiusura anzichè l'apertura del primario, sarebbero soppressi gli inconvenienti della scintilla primaria.

L'efficacia di questo dispositivo sarà pure esaminata in questa Nota, e sarà dimostrato che esso è inadatto allo scopo che l'autore si propone.

Infine sarà proposto un nuovo dispositivo che non evita la scintilla primaria ma permetterebbe di ricorrere a un circuito magnetico chiuso; la discussione delle condizioni di funzionamento lascia prevedere un miglioramento non piccolo rispetto al tipo attuale del rocchetto d'induzione.

È utile anzitutto riassumere le nostre attuali conoscenze sul funzionamento del rocchetto, mettendo in luce le ipotesi che si fanno per render possibile la trattazione del problema.

La spiegazione più soddisfacente si ricava dai lavori di Colley [1]) e di Armagnat; a quest'ultimo si deve inoltre una preziosa monografia « La bobine d'induction » [2]) nella quale è esposto con grande chiarezza tutto quanto si conosce sull'importante argomento.

Stabilita la necessità della derivazione di un condensatore ai poli dell'interruttore e riconosciuto, dopo le ricerche di Armagnat, che la rottura *geometrica* del circuito primario precede di alcuni istanti la scintilla all'interruttore, risulta

1) Colley, *Wied. Ann.* t. 44, pag. 109, 1891.
2) Armagnat, *Le Bobine d'induction*, Gauthier-Villars, Paris.

chiaro che dal momento della rottura geometrica nel sistema formato dal primario e dal condensatore si determinano delle oscillazioni elettriche, aventi per fase iniziale il valore zero della differenza di potenziale ai poli del condensatore, cioè il valore zero dell'energia elettrostatica del sistema, e il valore massimo I_0 della corrente, cioè il valore massimo dell'energia elettromagnetica.

Cominciata la prima oscillazione cresce, con legge approssimativamente sinusoidale, la differenza di potenziale ai poli comuni del condensatore e dell'interruttore, come pure quella ai poli del secondario che è eguale al prodotto della prima per il coefficiente di moltiplicazione del rocchetto. Se la distanza tra i poli del secondario è troppo grande, a un certo punto scocca una prima scintilla nell' interruttore, la quale annulla la differenza di potenziale ai poli del condensatore; il fenomeno ricomincia sulla base dell' attuale valore della corrente, minore di quello iniziale; e dopo un certo numero di tali ripetizioni, dipendente dalla velocità di allontanamento del pezzo mobile dell'interruttore, quando la resistenza alla scintilla primaria è divenuta, per l'aumentata distanza degli estremi dell'interruttore, più grande di quella relativa al secondario, scocca la prima scintilla in quest'ultimo, mentre le oscillazioni nel circuito primario proseguono senza ulteriori scintille primarie.

Dallo istante in cui cessa l'ultima scintilla all'interruttore il fenomeno adunque procede come se, nel primario, fossero solo presenti un' induttanza e una capacità, di cui la prima tiene immagazzinata un'energia elettromagnetica $L \frac{I_1^2}{2}$ indicando con I_1 l'intensità della corrente nell'istante medesimo; cominciano cioè delle oscillazioni rette dalle equazioni differenziali:

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d i_2}{d t} + \frac{1}{C_1} \int i_1 \, dt = 0$$

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d i_1}{d t} + \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt = 0$$

nelle quali le varie lettere hanno il significato consueto e gli indici 1 e 2 si riferiscono al primario e al secondario.

L'integrazione di queste equazioni non presenta teoricamente alcuna difficoltà nell'ipotesi che r_2 sia costante [1]; in pratica però riesce tutt'altro che facile, dipendendo dalla risoluzione di una complessa equazione di 4° grado.

Una prima semplificazione viene introdotta nella teoria del Colley; egli ammette che sia trascurabile il termine $M \frac{di_2}{dt}$, cioè la reazione del secondario sul primario, con che la prima equazione acquista la forma classica di lord Kelvin; il valore ottenuto per i_1, riportato nella seconda equazione, permette la risoluzione di questa ultima, facilitata da una seconda ipotesi, che cioè i coefficienti di smorzamento $\frac{r_1}{2L_1}$ e $\frac{r_2}{2L_2}$ del primario e del secondario siano dello stesso ordine di grandezza e molto piccoli di fronte alla pulsazione $\frac{2\pi}{T}$ della corrente oscillante primaria. Malgrado tutte queste semplificazioni, e la ipotesi fondamentale che i coefficienti L_1, L_2, M, siano costanti, la equazione finale che dà i_2 è abbastanza complessa. Inoltre, volendo tener conto della scintilla primaria, resta sconosciuto il valore I_1 della corrente all'istante in cui scocca la prima scintilla al secondario.

Se per quest'ultimo si ricerca solo la f. e. m. di induzione in esso agente per virtù del primario, cioè $M \frac{di_1}{dt}$, la teoria si semplifica ancora di molto. Ciò venne fatto dall'Armagnat, e dal medesimo punto di vista si pone il Lori.

Posto ciò il dispositivo di Norton e Lawrence, adesso nuovamente proposto dal Lori, e consistente nel caricare un condensatore con una f. e. m. costante e scaricarlo subito dopo nel primario del rocchetto, si riconduce al caso precedente, del quale è perfettamente analogo. Anche adesso il sistema primario-condensatore viene posto in oscillazione, solo che la fase iniziale coincide con la massima differenza di potenziale

1) Corbino, *Atti A. E. I.*, Vol. VII, fasc. 6°, pag. 654, anno 1903.

al condensatore, anzichè con la massima magnetizzazione del nucleo; e quindi, con le solite semplificazioni, l'intensità nel primario è espressa da

(3) $$i_1 = \frac{V}{L_1 \beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

anzichè da

$$i_1 = I_1 e^{-\alpha t} (\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \beta t)$$

nelle quali relazioni V è il potenziale iniziale di carica del condensatore e inoltre si ha

$$\alpha = \frac{r_1}{2 L_1}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} - \frac{r_1^2}{4 L_1^2}}.$$

Il Lori, partendo dalla (3), discute le condizioni perchè si abbia la massima f. e. m. di induzione $M \frac{di_1}{dt}$ al secondario, cioè il valore massimo di $\frac{di_1}{dt}$; e perviene alla conclusione, con un calcolo molto laborioso, che si deve avere $\beta = 0$, cioè

(4) $$\frac{r_1^2}{4 L_1^2} = \frac{1}{L_1 C_1}$$

questa condizione egli chiama *condizione di risonanza*. Il valore massimo corrispondente della $\frac{di_1}{dt}$ sarebbe con ciò

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_m = \frac{V}{L_1} e^{-2}.$$

Questo risultato è inesatto, poichè se si suppone invece trascurabile la resistenza r_1, con che la (3) diviene, per i primi istanti almeno,

$$i_1 = \frac{V}{L_1 \beta} \operatorname{sen} \beta t$$

si ottiene

$$\frac{d i_1}{d t} = \frac{V}{L_1} \cos \beta t$$

il cui massimo, per $t = 0$, è dato da

$$\left(\frac{d i_1}{d t}\right)_m = \frac{V}{L_1}\,.$$

Adunque non è vero che alla condizione (4) corrisponda il massimo valore di $\frac{di_1}{dt}$, poichè l'ultimo è più che sette volte maggiore di quello calcolato dal Lori.

Del resto partendo dalla sua formola (35)

$$\left(\frac{d i_1}{d t}\right)_m = \frac{V}{L_1}\; e^{-\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc\,sen} \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}}$$

che dà il valore massimo di $\frac{di_1}{dt}$ nelle sue variazioni col tempo, e considerando questo valore come funzione della resistenza r_1, da cui dipendono α e β, si riconosce subito che il massimo valore di $\left(\frac{di_1}{dt}\right)_m$, rispetto a r_1 si ha per $\alpha = 0$, cioè per $r_1 = 0$, mentre al crescere di r_1 l'esponente aumenta in valore assoluto, con che diminuisce il primo membro.

Non conviene adunque accrescere la resistenza del primario fino a farle raggiungere il valore richiesto dalla (4).

Alcune esperienze da me eseguite in proposito, ricorrendo a un rocchetto di 35 centim. di scintilla e a un condensatore di 10 microfarad, caricato alla tensione della conduttura stradale (150 volt) mi hanno appunto confermato che la massima distanza esplosiva al secondario si ottiene quando la resistenza del primario ha il minimo valore possibile.

Prima di esaminare il secondo dispositivo proposto dal Lori è utile ricercare l'energia sviluppata nel secondario, supposto rilegato a una resistenza ohmica, nel periodo variabile di chiusura della corrente primaria; il calcolo può essere con-

dotto indipendentemente dall'ipotesi che i coefficienti di induzione siano costanti.

Sia E la f. e. m. agente bruscamente nel primario all'istante 0; φ il flusso che attraversa il primario, $m\varphi$ quello che attraversa il secondario, cosicchè m denota il coefficiente di moltiplicazione del rocchetto.

Si ha per i due circuiti

$$(5) \qquad E = r_1 i_1 + \frac{d\Phi}{dt}$$

$$(6) \qquad 0 = r_2 i_2 + m \frac{d\Phi}{dt}$$

Dalla prima si deduce

$$E i_1 dt = r_1 i_1^2 dt + i_1 \frac{d\Phi}{dt} dt$$

e indicando con W_1 l'energia sviluppata del primario durante il tempo t, cioè $\int r_1 i_1^2 dt$, e con q la totale quantità di elettricità passata sarà

$$(7) \qquad E q = W_1 + \int i_1 \frac{d\Phi}{dt} dt .$$

Ma si deduce dalla (5)

$$i_1 = \frac{1}{r_1}\left(E - \frac{d\Phi}{dt}\right)$$

quindi

$$E q = W_1 + \frac{E}{r_1}\Phi - \frac{1}{r_1}\int\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 dt$$

cioè, indicando con A l'ultimo integrale e chiamando I_1 il valore finale della corrente primaria, eguale a $\frac{E}{r_1}$

$$(8) \qquad E q = W_1 + I_1 \Phi - \frac{A}{r_1} .$$

Dalla (6) si deduce invece, indicando con W_2 l'energia sviluppata nel secondario,

$$W_2 = r_2 \int i_2^2\, dt = \frac{m^2}{r_2} \int \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 dt$$

cioè:

$$(9) \qquad W_2 = \frac{m^2 A}{r_2}.$$

Intanto il primo membro della (8) rappresenta il lavoro compiuto dalla pila; esso è eguale all'energia termica sviluppata nel primario e nel secondario, accresciuta dell'energia elettromagnetica U immagazzinata nel sistema:

$$E q = W_1 + W_2 + U .$$

Confrontando con la (8) si deduce

$$(10) \qquad W_2 = I_1 \phi - \frac{A}{r_1} - U$$

e quindi, eliminando A tra le (9) e (10)

$$(11) \qquad W_2 = \frac{m^2}{m^2 + \frac{r_2}{r_1}} (I_1 \phi - U)$$

nella quale I_1 e φ denotano i valori finali dell'intensità e del flusso, e U l'energia totale richiesta per creare il flusso φ.

L'espressione in parentesi, se la permeabilità del ferro fosse costante, sarebbe eguale a U, poichè in tal caso è

$$\frac{I_1 \phi}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} = U .$$

Invece, data la forma nota della curva di magnetizzazione del ferro, sarà

$$\frac{I_1 \phi}{2} > U .$$

Invero se la curva A M B (fig. 1) rappresenta il flusso in funzione della corrente magnetizzante, l'energia spesa per produrre il flusso $\varphi = BC$ corrispondente all' intensità I_1 è data dall' area A M B D, mentre il valore di $\frac{I_1 \varphi}{2}$ è dato dall'area del triangolo A B D.

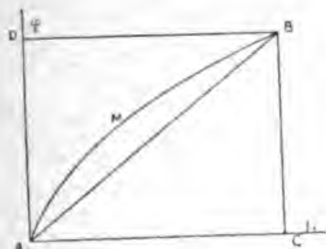


Fig. 1.

Risulta pure che l'espressione in parentesi contenuta nella (11) è rappresentata dall'area A M B C, per conoscere la quale basta una determinazione preliminare della curva di induzione magnetica e non occorre conoscere la legge con cui i_1 è funzione del tempo.

Supponiamo adesso, per studiare il dispositivo del Lori, che dopo l'annullamento della corrente magnetizzante, con che il flusso φ a causa dell'isteresi conserva un valore φ' poco diverso da φ, venga inserita bruscamente nel primario una f. e. m. inversa E, capace quindi di produrre alla fine del periodo variabile lo stesso valore assoluto φ del flusso.

Le equazioni differenziali rimangono le (5) e le (6), e rimane valida la (7), quando si tenga conto che E ha il segno cambiato

$$-E q = W_1 - \frac{E}{r_1}\int_{\varphi'}^{-\varphi} d\varphi - \frac{A}{r_1} = W_1 + \frac{E}{r_1}(\varphi + \varphi') - \frac{A}{r_1}$$

cioè

$$-E q = W_1 + I_1 \varphi + I_1 \varphi' - \frac{A}{r_1} \tag{8 bis}$$

mentre per il secondario vale ancora la (9)

$$W_2 = \frac{m^2 A}{r_2} \tag{9}$$

Siccome in questo caso non c'è approssimativamente variazione dell'energia magnetica immagazzinata nel nucleo, il lavoro della pila sarà impiegato al riscaldamento del primario e del secondario, e a creare la totale energia elettromagnetica U del sistema, diminuita dell'energia magnetica u già posseduta; sarà quindi

$$-Eq = W_1 + W_2 + U - u$$

e per confronto con la (8 bis) si ottiene

$$W_2 = -\frac{A}{r_1} + I_1 \varphi + I_1 \varphi' - (U - u).$$

Intanto $I_1 \varphi'$ (energia mutua di un circuito percorso dalla corrente I_1 e di un campo, indipendente da I, capace di produrre nel circuito il flusso φ'), è eguale approssimativamente a $U - u$, poichè se si diminuisce fino a zero la corrente magnetizzante, con che sussiste alla fine il flusso permanente φ', della totale energia elettromagnetica U si perde appunto $I_1 \varphi$, e quindi la rimanente energia magnetica u è eguale a $U - I_1\varphi'$, cioè

$$I_1 \varphi' = U - u.$$

Si può quindi scrivere, senza errore grave,

$$W_2 = I_1 \varphi' - \frac{A}{r_1}$$

che combinata con la (9) dà

$$W_2 = \frac{m^2}{m_2 + \frac{r_2}{r_1}} I_1 \varphi$$

nella quale I_1 e φ hanno lo stesso valore che nella (11).

Se la permeabilità del ferro fosse costante, nel qual caso come si è visto la espressione in parentesi della (11) si riduce a $\frac{I_1 \varphi}{2}$, il nuovo valore dell'energia W_2 sarebbe doppio del primo.

Invece per l'osservazione già fatta che in realtà l'espressione in parentesi contenuta nella (11) è rappresentata dall'area AMBC e poichè $I_1 \varphi$ è rappresentata dal rettangolo ACBD, si vede che il nuovo valore di W_2 è certamente minore del doppio del primitivo, pur essendo maggiore di questo.

Adunque con la manovra del Lori si sviluppa nel secondario una quantità di energia compresa tra una volta e due volte quella che si sviluppa alla semplice chiusura del circuito magnetizzante.

È facile inoltre riconoscere che con la manovra medesima si otterrà agli estremi del secondario una f. e. m. necessariamente limitata.

Si rappresenti, invero, nella figura 2 il ciclo d'isteresi del ferro adoperato, riferito al valore i della corrente magnetizzante; è chiaro che la manovra del Lori corrisponde essenzialmente ai tratti quasi rettilinei AB e CD della curva, nei

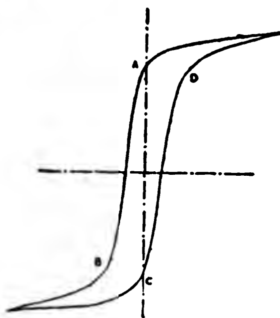


Fig. 2.

quali perciò $\frac{d\varphi}{di}$ ha un valore K elevato e sensibilmente costante, cosicchè si può porre

$$\frac{d\varphi}{dt} = K \frac{di}{dt}.$$

Se si trascura la reazione del secondario, la (5) diviene perciò

$$E = r_1 i_1 - K \frac{d i_1}{dt}$$

che integrata darà

$$i_1 = \frac{E}{r_1}\left(1 - e^{-\frac{r_1}{K} t}\right)$$

e quindi

$$\frac{d i_1}{dt} = - \frac{E}{K} e^{-\frac{r_1}{K} t} .$$

Il valore massimo di $\frac{d i_1}{dt}$ sarà quindi

$$\left(\frac{d i_1}{d t}\right)_m = - \frac{E}{K}$$

cioè si avrà

$$\left(\frac{d\Phi}{d t}\right)_m = K \left(\frac{d i_1}{d t}\right)_m = - E .$$

Adunque il valore massimo della f. e. m. al secondario che è $m \frac{d\varphi}{dt}$, sarà indipendente da K, cioè dalla ripidità dei tratti di curva A B e C D ed eguale a m E, esso sarà quindi eguale al valore che si ottiene nella semplice chiusura del circuito con la manovra ordinaria del rocchetto, valore che, come sappiamo, è molto piccolo.

Del resto dalla formola generale

$$i_1 = \frac{E - \frac{d\Phi}{d t}}{r_1}$$

essendo i_1 e E dello stesso segno, si deduce che $\frac{d\varphi}{dt}$ è minore di E; cosicchè col dispositivo del Lori la f. e. m. induttiva

agli estremi del primario non può superare la f. e. m. E della pila, come alla chiusura; mentre con la manovra ordinaria alla rottura essa si eleva a parecchie migliaia di volt.

La soppressione, adunque, della scintilla all'interruttore non basta a compensare la notevole diminuzione della distanza esplosiva dell'apparecchio.

Il nuovo artificio che permette l'impiego di un circuito magnetico chiuso, e del quale mi propongo adesso di studiare le condizioni di funzionamento è il seguente.

Su un nucleo rettilineo di ferro siano avvolti due circuiti eguali di filo grosso, in modo che lo stesso flusso di induzione li traversi entrambi.

In uno dei due agisca la corrente di una pila, periodicamente interrotta nel modo ordinario. Gli estremi dell'altro siano rilegati al primario (filo grosso) di un trasformatore a circuito magnetico chiuso.

Il sistema dei due induttori può essere rappresentato schematicamente come nella figura 3, nella quale 1 indica il primo nucleo con due avvolgimenti eguali, 2 il trasformatore; *a* e *b* sono il primario e il secondario del primo induttore, *c* e *d* quelli del secondo.

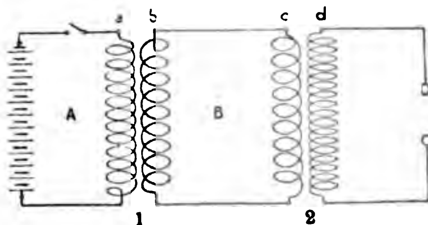


Fig. 3.

Sia L l'induttanza di *a*; sarà anche L l'induttanza di *b* ed L il coefficiente di induzione mutua. Inoltre sia L' l'induttanza di *c* ed *m* il coefficiente di trasformazione dell'induttore 2, i_1 la corrente nel circuito A, i_2 la corrente in B; e si supponga trascurabile di fronte al grande valore delle f. e. m. induttive, la perdita ohmica di tensione in B.

Per una legge qualsiasi di variazione di i_1, tanto alla chiusura che alla rottura, vale nel circuito B, qualora si trascuri la reazione di d, la relazione

$$(L + L') \frac{d i_2}{d t} + L \frac{d i_1}{d t} = 0$$

e quindi si ha

$$L \frac{d i_2}{d t} = - \frac{L'}{L + L'} \frac{d i_1}{d t} . \qquad (12)$$

La totale f. e. m. di autoinduzione e di induzione mutua nel circuito A sarà quindi

$$L \frac{d i_1}{d t} + L \frac{d i_2}{d t} = \frac{L L'}{L + L'} \frac{d i_1}{d t}$$

cioè il circuito a si comporta in tutti gli effetti come un circuito solo avente l'induttanza $\frac{L L'}{L + L'}$ e quindi l'andamento della corrente in A sarà alla chiusura e alla rottura identico a quello che si otterrebbe in un rocchetto ordinario a secondario aperto e di induttanza $\frac{L L'}{L + L'}$. Dalla (12) si ricava poi

$$i_2 = - \frac{L}{L + L'} i_1 + \text{cost} .$$

La costante è determinabile con la condizione che la quantità totale di elettricità trasportata in un periodo completo dell'interruttore sia nulla; essa è cioè eguale a una frazione nota della corrente *media* che traversa il primario a.

Per conseguenza: la curva che rappresenta la corrente i_2 è identica a quella relativa alla i_1; soltanto l'asse delle ascisse deve spostarsi in modo da annullare in un periodo dell'interruttore l'area compresa tra la curva e l'asse medesimo; e, come per un cambiamento di scala, le nuove ordinate devono pensarsi ridotte in un rapporto conosciuto $\left(\frac{L}{L + L'}\right)$.

La differenza di potenziale agli estremi del primario c del trasformatore è intanto eguale a quella induttiva esistente agli estremi di a, cioè a $-\frac{L\,L'}{L+L'}\frac{di_1}{dt}$ quindi nel secondario d del trasformatore si sviluppa la stessa f. e. m. che si otterrebbe in un rocchetto ordinario avente lo stesso coefficiente di trasformazione m e l'induttanza $\frac{L\,L'}{L+L'}$, nel primario, e i due sistemi saranno elettricamente equivalenti.

Occorre adesso esaminare se dal lato tecnico il nuovo sistema presenta vantaggi su un rocchetto ordinario.

Per poter eseguire razionalmente il confronto ammetteremo che il trasformatore 2 e il rocchetto ordinario di confronto abbiano eguali gli avvolgimenti primario e secondario, e i nuclei abbiano lo stesso volume; soltanto il nucleo è chiuso nel primo e aperto nel secondo.

Dimostreremo che è possibile costruire l'induttore 1 in modo che nei due casi la intensità i_1 nel circuito della pila sia assolutamente la medesima, il che è indispensabile per assicurare l'identità di comportamento dell'interruttore, e l'uguaglianza in tutti i tempi di $\frac{di_1}{dt}$.

Se ne dedurrà che gli effetti elettrici del nuovo e dell'antico sistema sono assolutamente identici, mentre i vantaggi d'altra natura del nuovo sistema saranno resi più evidenti.

Il semplice fatto che il trasformatore 2 è a circuito magnetico chiuso implica, a parità di condizioni geometriche dell'avvolgimento primario, un accrescimento dell'induttanza rispetto a quella che si ottiene con un nucleo aperto.

Invero le considerazioni note intorno al valore più favorevole del fattore smagnetizzante nei primari dei rocchetti conducono alla regola che per un nucleo rettangolare aperto (fig. 4), la riluttanza magnetica $\frac{\lambda}{\mu S}$ del nucleo sia eguale a quella $\frac{\lambda'}{S}$ dell'interferro [1]). Se questo viene soppresso la rilut-

1) Armagnat, l. c. § 13.

tanza totale si ridurrà a metà, qualora il flusso, e quindi μ, conservino lo stesso valore di prima; in ogni caso per ottenere lo stesso flusso basterà una forza magnetomotrice, o un numero di ampegiri metà.

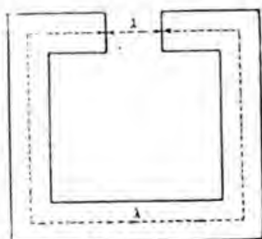


Fig. 4.

Se la permeabilità fosse costante questo apporterebbe che con lo stesso numero di giri di un rocchetto a nucleo aperto si avrebbe un coefficiente di autoinduzione doppio. Ciò non si verificherà esattamente nel nostro caso, poichè la corrente nel primario del trasformatore a nucleo chiuso è alternativa, anzichè pulsante, ed ha limiti più ristretti di variazione rispetto a quella che circolerebbe nel primario di un rocchetto a nucleo aperto inserito direttamente in A; il che apporta un accrescimento della permeabilità.

In conclusione a parità di condizioni geometriche il primario del trasformatore a nucleo chiuso inserito in B, avrà un coefficiente di autoinduzione più che doppio di quello spettante al primario di un rocchetto a nucleo aperto inserito direttamente nel circuito A — chiamiamo Λ l'induttanza di quest' ultimo, e poniamo

$$L' = p\,\Lambda\,, \text{ con } p > 2\,.$$

Allora con tutto il sistema complesso 1, 2, la corrente primaria in A procederà come se l' induttanza avesse il valore

$$\frac{L\,L'}{L + L'} = \frac{p\,L\,\Lambda}{L + p\,\Lambda}$$

e la forza e. m. utile in *d* sarà

$$m \frac{p \mathrm{L} \Lambda}{\mathrm{L} + p \Lambda} \frac{d i_1}{d t} .$$

Invece col semplice rocchetto a nucleo aperto l'induttanza in *a* sarà Λ e la forza e. m. utile al secondario sarà $m \Lambda \frac{di_1}{dt}$.

Se vogliamo che la legge di variazione di i_1 sia identica nei due casi, deve essere

$$\frac{p \mathrm{L} \Lambda}{\mathrm{L} + p \Lambda} = \Lambda$$

cioè

$$\mathrm{L} = \frac{p \Lambda}{p - 1} \tag{13}$$

condizione che è ben facile realizzare essendo L a nostro arbitrio; con ciò i due sistemi saranno elettricamente equivalenti.

Il sistema da noi proposto richiede però l'aggiunta dell'induttore 1.

Questa aggiunta non è un grave inconveniente, poichè si tratta di un volume limitato di ferro su cui vanno avvolti pochi strati di filo grosso, cosicchè il valore di L può essere reso notevole senza grave spesa.

Intanto abbiamo visto che a parità di condizioni geometriche tra il trasformatore 2 e il rocchetto ordinario di riferimento si ha

$$p > 2 .$$

Se invece il trasformatore 2 avesse dimensioni minori, conservando lo stesso coefficiente di trasformazione, sarebbe ancora possibile ottenere l'equivalenza negli effetti elettrici col rocchetto Λ, purchè si modifichi l'induttore 1 in modo che sia ancora soddisfatta la (13); cosicchè *si potrà ridurre*

le dimensioni del trasformatore 2, purchè sia sempre, e notevolmente,

$$p > 1$$

alla quale condizione, per la (13), è subordinata la possibilità di costruzione del trasformatore 1. In altri termini, per equiparare in tutti gli effetti il sistema 1, 2 e l'unico rocchetto A si potrà diminuire le dimensioni del trasformatore 2, di difficile costruzione, purchè si accrescano in corrispondenza quelle del trasformatore 1 che è tanto più semplice.

Ma indipendentemente da questo vantaggio, certo non indifferente, e anche lasciando eguali le dimensioni del trasformatore 2 e del rocchetto di riferimento A, un vantaggio rilevante si ha nella migliore distribuzione degli avvolgimenti per l'adozione del circuito magnetico chiuso, cui corrisponde una minore dispersione del flusso.

Invero nei rocchetti ordinari l'avvolgimento secondario è *condensato* nella regione centrale del nucleo, cosicchè delle spire del primario una notevole parte, mentre accresce solo di poco il flusso utile al secondario, è interamente attiva nello elevare perniciosamente la tensione $L \frac{di_1}{dt}$ al primario, prolungando quindi la fase delle scariche all'interruttore. Invece con un circuito magnetico chiuso le spire secondarie possono essere distribuite lungo tutto il primario, cioè lungo uno spazio circa doppio, il che permette di accrescerne il numero, o di diradarle notevolmente e quindi di ricorrere a filo più grosso, accrescendo la potenza utile e facilitando la costruzione.

Complicazioni potranno sorgere per l'isteresi del ferro, in quanto nel trasformatore 2 questo seguirà cicli non simmetrici per la disuguaglianza delle correnti opposte che si hanno nel circuito B a ogni chiusura e apertura del circuito A.

Si può prevedere che all'onda generata in B dalla chiusura di A corrisponda una energica magnetizzazione permanente del nucleo chiuso con restituzione dell'energia immagazzinata alla successiva onda dovuta all'apertura di A. Si

possono ripetere adesso le considerazioni già fatte sul secondo dispositivo del Lori, con la differenza che, durante la smagnetizzazione, nel circuito B agisce la enorme f. e. m. dovuta alla rottura di A, anzichè la f. e. m. limitata della pila come nell'artificio suddetto.

Ciò adunque non può esser di danno al funzionamento dell'apparecchio, permettendo anzi di concentrare nella scarica di apertura (la sola capace di traversare il secondario *d* rilegato allo spinterometro), una più rilevante quantità di energia.

Una ulteriore discussione aprioristica di questi particolari riuscirebbe oziosa; sarebbe invece molto più conducente la prova sperimentale che io non posso tentare per deficienza di mezzi.

LETTERATURA FISICA

A. Fisica generale.

1. Generalità.

Pearson K. On the Influence of Past Experience on Future Expectation. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 265, 1907.

Cruz A. Une leçon de physique et de mécanique au XX siècle. L'énergie. Théorie nouvelle sur la nature de l'énergie, à propos des récentes découvertes des sels de radium et du téléphote. Amiens, Jeunet, 1907.

Wiebe H. F. Die Mechanik und die Glasindustrie auf der Mailänder Ausstellung 1906. *Deut. Mech. Zeit.* 1907, pag. 1 e 13.

Schreber K. Hochschule und Unterrichtsfragen und der Verein Deutscher Ingenieure. *Math. Naturw. Bl.* 1907, N. 1.

Haga K. H. Eine neue Methode zur Zerlegung einer periodischen Kurve in ihre Harmonischen. *Arch. der Math. und Phys.* (3), **11**, pag. 239, 1907.

Traube J. Volumen und Valenz. Atom und Elektron. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 519, 1907.

Pellat H. Sur la constitution de l'atome. *Compt. Rend.* **144**, pag. 480, 1907.

Hadamard M. Les problémes aux limites dans la théorie des equations aux derivées partielles. *Journ. de Phys.* (4), **6**, pag. 292, 1907.

Farkas J. Ueber das Postulat der Relativität. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 169, 1907.

Mudge G. P. A Problem in Chance. *Nature.* **75**, pag. 461, 1907.

Downess Shaw A. H. Technical Terminology. *Nature.* **75**, pag. 490, 1907.

2. Densità.

Emster (van) K. Ueber Dichte und Prozentgehalt wässeriger Ueberchlorsäurelösungen. *Zeit. für anorg. Chem.* **52**, p. 270, 1907.

Marini L. Confronto degli areometri ad immersione parziale e ad immersione totale per la misura della densità dell'acqua di mare. *Rend. Acc. Linc.* (5), **16**, pag. 305, 1907.

3. Meccanica dei solidi. Elasticità. Potenziale.

Koenigs G. Construction du rayon de courbure des courbes enveloppés dans le mouvement le plus général d'un corps solide. *Compt. Rend.* **144**, pag. 431, 1907.

Dziobek O. Die Grundlagen der Mechanik. VI+345 Seiten. Berlin, E. S. Mittler und John, 1907.

Grünwald A. Darstellung der Mannheim-Darbouxschen Umschwungbewegung eines starren Körpers. *Zeit. für Math. u. Phys.* 54, pag. 154, 1907.

Sommerfeld A. Ueber die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. *Zeit. für Math. u. Phys.* **54,** pag. 113, 1907.

Miller W. E. Maximum gravitational Attraction on a Solid. *Nature.* 75, pag. 439, 1907.

A. H. The compressibility of crystalline Rocks. *Nature.* **75,** pag. 451, 1907.

Bearce H. W. The elastic Modulus for small Loads at the Elastic Limit. *Phys. Rev.* **24**, pag. 191, 1907.

Koenigs G. Sur les déformations élastiques qui laissent invariables les longueurs d'une triple infinité de lignes droites. *Compt. Rend.* **144**, pag. 557, 1907.

4. Meccanica dei Liquidi. Capillarità.

Lorenz H. Theorie der Kreiselräder auf Grund der Wirbelbewegung. *Phys. Zeit.* 8, pag. 139, 1907.

Brunhes B. Les lois de la filtration à travers des colonnes de sable, et les lois des Ohm. *Journ. de Phys.* (4), **6**, pag. 194, 1907.

Ollivier H. Recherches sur la capillaritè. *Ann. de chim. et phys.* (8), **10**, pag. 289, 1907.

5. Meccanica degli aeriformi.

Sharpe J. W. The Flight of an Elongated Shot. *Nature.* 75, pag. 391, 1907.

Jouguet. Remarque sur les ondes de choc. Application à l'onde explosive. *Compt. Rend.* **144**, pag. 415, 1907.

Crussard. Sur quelques propriétés de l'onde explosive. *Compt. Rend.* **144**, pag. 417, 1907.

Bendemann F. Ueber den Ausfluss des Wasserdampfes und über Dampfmeugenmessung. *Mit. über Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurw.* **37**, pag. 1, 1907.

Laboccetta L. Sul confronto delle forme di minima resistenza e sulla potenza motrice necessaria alla loro propulsione. *Boll. Soc. Aer. It.* **4**, pag. 2, 1907.

Balston R. M. The stability of the conic Shape in Kites and Flying Maschines. *The aer. Journal*, N. 41, pag. 21, 1907.

Riedel Fr. Zum Studium des dynamischen Fliegens. *Ill. Aer. Mit.* **11**, pag. 54, 1907.

Crussard et **Jouguet.** Sur les ondes des choc et combustion. Stabilité de l'onde explosive. *Compt. Rend.* **144**, pag. 560, 1907.

Kajbic H. Das Flugproblem. Graz, 1907.

Macaluso G. L'Apologia della direzione del pallone. Palermo, 1907.

6. Apparecchi.

Grüneisen E. Interferenzapparat zur Messung elastischer Dehnungen von Stäben. *Zeit. für Instrumen. kunde.* **27**, pag. 38, 1907.

Ubbelohde L. Ehrenrettung des Kranzbrenners des Englerschen Schmierölviskosimeters. *Chem. Zeit.* **31**, pag. 28, 1907.

Preuss E. Schreibfedern mit selbsttätigem Schreibtuschenachfluss für Registierinstrumente. *Deut. Mech. Zeit.* 1907, pag. 33.

Edelmann T. Laboratoriumseinrichtung mit Fernrohrbalken und Einhängeleisten. *Deut. Mech. Zeit.* pag. 41, 1907.

B. Fisica-chimica.

1. Generalità. Teoria. Pressione osmotica.

Walker J. Introduction to Physical Chemistry. Macmillan and Co Ltd. London, 1907.

Milbauer J. Oxydation des Wasserstoffs mittels Schwefelsäure. *Zeit. für phys. Chem.* **57**, pag. 649, 1907.

Smith A. und **Carson C. M.** Ueber den amorphen Schwefel IV. Weitere Untersuchungen der beiden Formen des flüssigen Schwefels als dynamischer Isomerer. *Zeit. für phys. Chem.* 57, pag. 685, 1907.

Laar (van) **J. J.** Ist es erlaubt, aus einer gefundenen anomalen Siedepunktserhöhung einer verdünnten Lösung auf den Molekularzustand des Lösungsmittels zu schliessen? *Zeit für phys. Chem.* **57**, pag. 742, 1907,

Minet A. Les poids atomiques, fonction du rang qu'ils occupent danr la série de leur valeur croissante. *Compt. Rend.* **144**, pag. 428, 1907.

Norris J. F. On the elementary nature and atomic weight of tellurium. *Chem. News.* **95**, pag. 54, 1907.

Traube J. Valenz, Lichthrechung und Volumen. Die Refraktionsstere. I. *Chem. Ber.* **40**, pag. 130, 1907.

Landolt. Ueber Gewichtsänderungen bei der Elektrolyse einer Cadmiumjodidlösung mit Wechselströmen *Berl. Ber.* 1907, pag. 93.

Einstein A. Theoretische Bemerkungen über die Brownsche Bewegung. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 41, 1908.

Bellucci I. e **Parravano N.** Sull'acido piombico colloidale. *Gazz. chim. it.* 37, pag. 171, 1907.

Fouard E. Sur les proprietés colloïdales de l'amidon. *Compt. Rend.* 144, pag. 501, 1907.

Berkeley E. On the osmotic Pressure of some concentrated aqueous Solutions. 28 pp. Dulan, 1907.

Castell Evans J. Physico-chemical Tables for the Use of Analyst Physicist ecc. C. Griffin and Co, Ltd, 1907.

2. Affinità. Solubilità. Assorbimento. Diffusione. Attrito interno.

Lehmann E. Ueber Trennung von Farbstoffen durch Diffusion. *Zeit. für phys. Chem.* **57**, pag. 718, 1907.

Jacobsohn F. Ueber anorganische Lösungsmittel und ihre dissoziirenden Eigenschaften. *Zeit. für Kompr. und flüss. Gase.* **10**, pag. 53, 1907.

Müller A. Ueber Zirkoniumsalze und kolloidales Zirkoniumoxydhydrat. *Zeit. für anorg. Chem.* **52**, pag. 316, 1907.

Gurney L. E. The viscosity of Water at low Rates of shear. *Phys. Rev.* **24**, pag. 232, 1907.

Biltz W. Einige Versuche über ultramikroskopische Löslichkeitsbestimmung. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 228, 1907.

Weigel O. Die Löslichkeit von Schwermetallsulphiden in reinem Wasser. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 293, 1907.

Smirnoff W. Verteilung von $SnCl_4$ zwischen Wasser und Xylol. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 373, 1907.

3. Elettrochimica. Elettrolisi.

Rosset G. L'électrolyse des Mélanges. *Éclair électr.* **50**, pag. 301, 1907.

Brunner E. Die kathodische und anodische Stromspannungskurve bei der Elektrolyse von Jod-Jodkaliumlösungen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 1, 1907.

Nordström G. Ueberführungszahl konzentrierter Kalilauge. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 35, 1907.

Loimaranta L. Ueber die Messung unzugänglicher Potentiale durch Potentialvermittler. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 33, 1907.

Abegg R. Ueber Potentialvermittler. *Zeit. für Elektrochem.* 13, pag. 34, 1907.

Fischer F. und **Massenez K.** Ueber die Darstellung von Ozon durch Elektrolyse. *Zeit. für anorg. Chem.* **52**, pag. 229, 1907.

Schulze G. Spannungsgefälle an Aluminiumanoden. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 543, 1907.

Wolff F. A. and **Waters C. E.** The electrode Equilibrium of the Standard Cell. *Phys. Rev.* **24**, pag. 251, 1907.

Wolff F. A. and **Water C. E.** The standard Cell. *Phys. Rev.* 24, pag. 252, 1907.

Richards T. W. und **Behr G. E.** Die elektromotorische Kraft von Eisen unter verschiedenen Bedingungen und der Einfluss von okkludiertem Wasserstoff. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 301, 1907.

Magri G. ed **Ercolini G.** Separazione quantitativa del ferro dal titanio e dall'alluminio. *Rend. Acc. Lincei,* (5), **16**, pag. 331, 1907.

4. Fotochimica.

Plotnikow J. Die photochemische Oxydation von Jodwasserstoff durch Sauerstoff. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 214, 1907.

Sheppard S. and **Mees C. E. K.** Investigation on the Theorie of the Photographic Process. Longmams and Co, 1907.

Pizzighelli G. L' Ozobromia. *Boll. Soc. Fot. It.* **19**, pag. 2, 1907.

5. Termochimica.

Timmermans J. Die kritische Lösungstemperatur von ternären Gemengen. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 129, 1907.

Thomlinson J. C. The thermochemistry of nitrogen. *Chem. News.* 95, pag. 5, 1907.

Wartenberg H. Ueber das Cyan, Cyanwasserstoff — und Acetylen — gleichgewicht *Zeit. für anorg. Chem.* **52**, pag. 299, 1907.

Berthelot M. et **Landricu Ph.** Sur les chaleurs de combustion et de formation de quelques principes immédiats azotés jouant un rôle physiologique. *Compt. Rend.* **144**, pag. 458, 1907.

Lemoult P. Recherches théoriques et expérimentales sur les chaleurs de combustion et de formation des composés organiques. *Ann. de chim. et phys.* (8), **10**, pag. 395, 1907.

Thomsen J. Systematic Researches in Thermochemistry, translated by K. A. Burke. Longmans and Co, 1907.

Plato W. Erstarrungserscheinungen an anorganischen Salzen und Salzgemischen. II. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 350, 1907.

6. Struttura. Cristallografia.

Rosati A. Studio cristallografico del seleniato di torio ottoidrato. *Rend. Acc. Linc.* (5), **16**, pag. 220, 1907, I Sem.

Carpenter C. H. and **Edwards C. A.** Properties of alloys. *Nature,* 75, pag. 426, 1907.

Joly J. Pleochroic Halos. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 381, 1907.

Copaux H. Sur la structure de la forme cubique du chlorate de soude douée de pouvoir rotatoire. *Compt. Rend.* **144**, pag. 508, 1907.

Ewing J. A. The structure of Metals. *Nature.* **75**, pag. 472, 1907.

Friedel G. Les bases de la cristallographie et les théories sur la structure des cristaux. *Rev. gén. des Scienc.* **18**, pag. 198, 1907.

C. Acustica.

1. Acustica fisica.

Rayleigh Lord. Acoustical Notes. VII. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 317, 1907.

Dvorák V. Ueber absolute Messungen der Schallintensität. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 606, 1907.

Davis H. N. Models illustrating the Motion of a Violin String. *Phys. Rev.* **24**, pag. 242, 1907.

Davis H. N. The Motion of a Violin String under Light Bowing. *Phys. Rev.* **24**, pag. 242, 1907.

2. Acustica musicale.

3. Acustica fisiologica.

Mc. Kendrick J. G. Speech Curves. *Nature.* **75**, pag. 392, 1907.

4. Apparecchi.

D. Calore.

1. Teoria meccanica del calore.

Jüttner Ferencz. Ueber den Zusammenhang der thermodynamischen Hypothese von Nernst mit dem Koppschen Gesetz. *Phys. Zeit.* 8, pag. 147, 1907.

Sackur O. Bemerkung zu vorstehender Abhandlung von F. Jüttner. *Phys. Zeit.* 8, pag. 150, 1907.

Wesendonck K (von). Ueber Entropie bei Körpern, deren Teile nicht in relativen Gleichgwichtszustande befindlich sind. *Phys. Zeit.* 8, pag. 154, 1907.

Einstein A. Ueber die Gültigkeitsgrenze des Satzes vom thermodynamischen Gleichgewicht und über die Möglichkeit einer neuer Bestimmung der Elementarquanta. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 569, 1907.

Schiller N. Eine Bemerkung über die Beziehung zwischen der absoluten Temperatur und der kinetischen Energie eines thermodynamischen Systems. *Ann. der Phys*, (4), **22**, pag. 573, 1907.

Adler F. W. Ueber die Mach-Lippmannsche Analogie zum zweiten Hauptsatz. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 587, 1907.

Nernst W. Theoretical Applications of Thermodynamics to Chemistry. A. Constable and Co. Ltd. 1907.

2. Teoria cinetica della materia.

Fischer W. J. The constants in Gas-Viscosity. *Phys. Rev.* 24, pag. 237, 1907.

v. Wesendonck K. Einige Bemerkungen zu Herrn Boltzmanns Theorie der Zusammenstösse allgemeinster Art. *Phys. Zeit.* 8, pag. 179, 1907.

Ensrud G. Die Atomenergie der Gase. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 257, 1907.

3. Dilatazione e termometria.

4. Calorimetria.

Bernini A. Ueber die spezifische Wärme des Calciums und des Lithiums. *Phys. Zeit.* 8, pag. 150, 1907.

Knoblauch O. und **Jacob M.** Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme c_p des Wasserdampfes vom Druck und Temperatur *Zeit. des Ver. der Jng.* **51**, pag. 81-124, 1907.

Bailey F. K. The latent Heat of Recalescence in Iron and Steel, *Phys. Rev.* **24**, pag. 129, 1907.

Clark B. M. On the variation of the heat of Mixture with Concentration and Temperature. *Phys. Rev.* **24**, pag. 236, 1907.

Battelli A. Calori specifici dei liquidi che solidificano a temperature molto basse. *Rend. Acc. Lincei*, (5), **16**, pag. 243, 1907.

5. Cambiamenti di stato. Proprietà dei vapori e dei gaz.

Baume G. et **Tsakalotos D. E.** Sur la variation des tensions de vapeur en fonction de la température et la détermination des constantes ébullioscopique, *Compt. Rend.* **144**, pag. 373, 1907.

Brill O. Zur Berechnung der Dampfdichten dissocierender Substanzen. *Zeit. für phys. Chem.* **57**, pag. 721, 1907.

Barus C. The efficiency of the Plug-cock Fog-Chamber. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 257, 1907.

Hinrichs G. Sur les points de fusion et d'ébullition des hydrocarbures aliphatiques et aromatiques. *Compt. Rend.* **144**, pag. 431, 1907.

Lehmann O. Ueber die van der Waalssche Formel und die Kontinuität der Aggregatzustände. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 469, 1907.

von **Vesendonk K.** Ueber das Verhalten gewisser Substanzen bei ihren Kritischen Temperaturen. *Naturw. Rund.* **22**, pag. 145, 1907.

6. Sorgenti di calore.

7. Conducibilità termica.

Carslaw H. S. Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals and the Mathematical Theory of the Conduction of Heat. London. Macmillan and Co, 1907.

8. Calore raggiante.

9. Apparecchi ed applicazioni termiche.

Heinel C. Zahlenstoff und Winke für Bau und Betrieb von Kältemaschinenanlagen. XIV+191 Seiten. München, R. Oldenbourg, 1907.

Haeder H. Die Gasmotoren. Düsseldorf. L. Schwann, 1907.

E. Ottica.

1. Teoria. Generalità.

Poynting J. H. Pressure of Light. London, H. Frowde, 1907.

Nutting P. G. The luminous Equivalent of Radiation. *Phys. Rev.* **24**, pag. 202, 1907.

Porter A. B. A color mixer. *Phys. Rev.* **24**, pag. 243, 1907.

Porter A. B. On the nature of optical images. *Phys. Rev.* **24**, pag. 244, 1907.

Hyde E. P. Geometrical theory of radiating surfaces with discussion of Light-Tubes. *Phys. Rev.* **24**, pag. 249, 1907.

2. Propagazione della luce, riflessione, rifrazione, dispersione, assorbimento, emissione.

Amar J. Sur la rétraction des corps. *Compt. Rend.* **144**, pag. 482, 1007.

Proctor C. A. Index of Refraction und Dispersion with the Interferometer. *Phys. Rev.* **24**, pag. 195, 1905.

Jewell L. E. Remarkable optical properties of Carborundum. *Phys. Rev.* **24**, pag. 239, 1907.

Lyman T. The absorption of some solid for Light of short Wave-Lenght. *Phys. Rev.* **24**, pag. 245, 1907.

Clerici E. Sulla determinazione dell'indice di rifrazione al microscopio. *Rend. Acc. Lincei*, (5), **16**, pag. 386, 1907.

3. Spettroscopia.

Wood R. W. Ionisation and Anomalous Dispersion. *Nature.* **75**, pag. 390, 1907.

Beckmann E. Ueber Spektrallampen V. *Zeit. für phys. Chem.* **57**, pag. 641, 1907.

Geuter P. Ueber die beim Phosphor auftretenden Emissionsspektren. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 33, 1907.

Bayer (von) **O.** Ueber die Struktur feinster Spektrallinien. *Verh. der Deut. phys. Ges.* **5**, pag. 84, 1907.

Le Bon G. La lumière et les actions antagonistes des diverses parties du spectre. *Rev. Scient.* (5), **7**, pag. 289, 1907.

Dufour A. Sur les spectres de l'hydrogène. *Journ. de Phys.* (4), **6**, pag. 177, 1907.

Reinganum M. Die Temperaturstrahlung des Joddampfes. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 182, 1907.

Schott G. A. Ionisation and Anomalous Dispersion. *Nature*, **75**, pag. 461, 1907.

4. Sorgenti luminose. Fotometria.

Paterson Cl. Étude sur les étalons lumineux et sur l'état actuel des lampes à incandescence à haut voltage. *Electrician.* **25**, gen. 1907 (*Éclair électr.* **50**, pag. 324, 1907.

*

Dow J. S. The theory of flicker photometers. *Electrician*, **58**, pag. 609, 1907.

Mendenhall C. E. and **Ingersoll L. R.** The radiation Constants and Temperature of the Nernst Glower. *Phys. Rev.* **24**. pag. 230, 1907.

S. Dow. Sur les photomètres à papillotement. *The Electrician.* 1 Feb. 1907 (*Éclair. électr.* **50**, pag. 397, 1907).

5. Luminescenza.

Becquerel H. Phosphorescence des sels d'uranyle dans l'air liquide. *Compt. Rend.* **144**, pag. 459, 1907.

6. Fotografia.

Gamble W. Penrose's Pictorial Annual. The Process Year Book for 1906-07. London. A. W. Penrose and Co. Ltd.

Agenda Lumière 1907, 402 pag. Gauthier-Villars. Paris.

Watkins A. Photography. A. Constable and Co. Ltd.

Demole E. Contribution à l'étude de l'image latente photographique. *Compt. Rend.* **144**, pag. 565, 1907.

Vandrslea E. Ueber die Verzeichnungsfehler photographischer Objektive. *Zeit. für Instrumentenkunde.* **27**, pag. 33, 1907.

Pizzighelli G. La stampa all'inchiostro grasso. *Boll. Soc. Fot. It.* **19**, pag. 16, 1907.

Castellani L. Le nuove lastre Autochromos per la fotografia a colori. *Boll. Soc. Fot. It.* **19**, pag. 11, 1907.

7. Interferenza. Diffrazione.

Sève P. Anneaux d'interférences du mica semi-argenté. *Soc. franc. de phys.* 1 Feb. 1907.

8. Ottica dei cristalli, birifrangenza, polarizzazione.

9. Rotazione del piano di polarizzazione.

Rosanoff M. A. Ueber das Prinzip ber optischen Superposition II. *Zeit für phys. Chem.* **57**, pag. 739, 1907.

Fischer E. Ueber die Bezeichnung von optischen Antipoden durch die Buchstaben *d.* und. *l. Chem. Ber.* **40**, pag. 102, 1907.

10. Ottica fisiologica.

11. Apparecchi.

Deslandres H. Sur quelques détails du spectrohéliographe. *Compt. Rend.* 144, pag. 541, 1907.

Castellani L. Macchine fotografiche Zeiss. *Boll. Soc. Fot. It.* **19**. pag. 1. 1907.

Pizzighelli G. Gli strumenti ottici usati in fotografia. *Boll. Soc. Fot. It.* 19, pag. 25, 1907.

F. Magnetismo.

1. Generalità. Teoria.

Kunz J. Les propriétés magnétiques de l'hématite. *Arch. de Genève.* (4), **23**, pag. 137, 1907.

Gans R. Zur Theorie des Ferromagnetismus. Gibt es wahren Magnetismus? *Ann. der Phys.* (4), 22, pag. 481, 1907.

Hill B. V. On the magnetic behaviour of certain Alloys of Nickel. *Phys. Rev.* 24, pag. 231, 1907.

Wills A. P. On magnetic Shielding. *Phys. Rev.* **24**, pag. 243, 1907.

Mc Lemann J. C. On the magnetic properties of Heusler's Alloys. *Phy. Rev.* **24**, pag. 248, 1907.

Rücker D. Ueber die Grösse de Koerzitivkraft bei stetiger und bei sprungweiser Magnetisierung. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 256, 1907.

2. Misure. Apparecchi.

G. Elettricità.

1. Teoria.

Poincarè H. Sur quelques théorémes généraux relatifs à l'èlectrotechnique. *Éclair électr.* **50**, pag. 293, 1907.

Bucherer A. H. Les potentiels retardés transformés. *Arch. de Genève.* (4), **23**, pag. 129, 1907.

Silberstein L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 579, 1907.

Righi A. Ueber die elektromagnetische Masse des Elektrons. *Phys. Zeit.* 8, pag. 161, 1907.

Kunz J. Lösung des Theorems von Poincarè-Lorentz mit Hilfe des Greenschen Satzes. *Phys. Zeit.* 8, pag. 171, 1907.

Lodge O. Modern Views of Electricity. New edition. Macmillan and Co, Ltd. 1907.

2. Elettrostatica. Macchine elettriche.

Magini R. Ueber den Einfluss der Ränder auf die elektrostatische Kapazität der Kondensatoren. *Phys. Zeit.* 8, pag. 136, 1907.

3. Scariche elettriche attraverso conduttori e dielettrici.

Kirkby P. J. Chemical Effects of the electric Discharge in Rarefied Hydrogen and Oxygen. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 289, 1907.

4. Sorgenti di elettricità. Polarizzazione.

White W. P. Méthode pour rendre constante la difference de potentiel aux bornes des batteries employée dans les mesures. *Electrician* 1 Feb. 1907. (*Éclair électr.* **50**, pag. 327, 1907).

Block W. Untersuchungen am stromliefernden Daniellelement. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 505, 1907.

Davis B. The Transformation into an Electric Current of Radiation incident on a moving Surfaces. *Phys. Rev.* **24**, pag. 181, 1907.

Guthe K. E. und Von **Ende C. L.** Standard Cells. *Phys. Rev.* **24**, pag. 214, 1907,

5. Conducibilità. Resistenza.

Willows R. S. Elektrischer Widerstand von Legierungen. *Phys. Zeit.* 8, pag. 172, 1907.

6. Fenomeni termici.

White W. P. Sur la constance des termo-éléments employées dans les pyromètres électriques. *Electrician.* 1 Feb. 1907. *(Éclair. électr.* **50**, pag. 327, 1907).

7. Fenomeni luminosi.

Davis B. Theory of the Electrodeless Ring Discharge. *Phys. Rev.* **24**, pag. 224, 1907.

Lorenz C. F. On Effects of the electrical Discharge on the Acetylene Flame. *Phys. Rev.* **24**, pag. 229, 1907.

8. Elettromagnetismo, para e diamagnetismo.

Schames L. Ueber die Abhängigkeit der Hysteresiswärme and der Permeabilität des Eisens von der Frequenz des Wechselfeldes. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 449.

9. Elettrodinamica e induzione.

Wittek W. Selbstinduktion einer rechteckigen Spule. *Elektr. Zeit.* XXVIII, pag. 209, 1907.

Pagnini P. Di alcune azioni elettrodinamiche. *Elettricista.* (2), **6**, pag. 50, 1907.

Rosa E. B. The mutual inductance of a circle and a coaxial helix. The Lorenz. - Experiment and the Ayrton. - Jones absolute Elektrodynamometer. *Phys. Rev.* **24**, pag. 240, 1907.

Rosa E. B. Mutual inductances for Laboratory-Use. *Phys. Rev.* **24**, pag. 241, 1907.

Rosa E. B. The mutual inductance of two coaxial Coils. *Phys. Rev.* **24**, pag. 241, 1907.

10. Oscillazioni elettriche.

Kohl E. Ueber die dielektrische Verschiebungsgleichungen für schnelle Schwingungen in ruhenden Mitteln. *Ann. der Phys.* (4) **22**, pag. 401, 1907.

Blair W. R. Change of Phase due to the passage of electric Waves through thin films, and the index of Refraction of Water for such Waves. *Phys. Rev.* **24**, pag. 231, 1907.

Wreeland K. Neues Verfahren zur Erzeugung ungedämpfter Schwingungen mit Quecksilberdampflampe. *The Electrician*, 58, pag. 685, 1907. (*Elektr. Zeit.* 28, pag. 276, 1907).

11. Magneto-ed elettro-ottica.

Becquerel J. Influence de la température sur l'absorption dans les cristaux. Phénoménes magnéto-optiques à la température de l'air liquide. *Compt. Rend.* 144, pag. 420, 1906.

Becquerel J. Recherches sur les phenomènes magnéto-optiques dans le cristaux. *Radium.* 4, pag. 49, 1907.

Zeeman P. Progrès récents en magnéto-optique. *Radium.* 4, pag. 57, 1907.

12. Raggi Catodici, Röntgen, ecc.

Gehrcke E. und **Reichenheim O.** Anodenstrahlen. *Verh. der Deut. phys. Ges.* 5, pag. 76, 1907.

Bestelmeyer A. Spezifische Ladung und geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen erzeugten Kathodenstrahlen. *Ann. der Phys.* (4), 22, pag. 429.

Van der Waals J. D. jr. Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen. *Ann. der Phys.* (4), 22, pag. 603, 1907.

Adams J. M. The transmission of Röntgen Rays through metallic Sheets. *Phys. Rev.* 24, pag. 246, 1907.

Walsh D. The Röntgen Rays in Medical Work. Baillière, Tindall and Cox, 1907.

13. Radioattività e ionizzazione.

Strutt. R. J. An Occurrence of Helium in the Absence of Radioactivity. *Nature.* 75, pag. 390, 1907.

Boltwood B. B. On the ultimate Disintegration Products of the Radioactive Elemente. II. The disintegration Product of Uranium. *Ann. Journ. of Science.* 23, pag. 77, 1907.

Levin M. Ueber einige Eigenschaften des Uraniums und Aktiniums *Phys. Zeit.* 8, pag. 129, 1907.

Gruner P. Aperçu général de la théorie de la désaggregation radioactive. *Arch. de Genève.* (4). 23, pag. 113, 1907.

Kelvin Lord. An attempt to explain the Radioactivity of Radium. *Phil. Mag.* (6), 13, pag. 313, 1907.

Bragg W. H. On the Ionisation of various Gases by the α. Particles of Radium. 2. *Phil. Mag.* (6), 13, pag. 333, 1907.

Frank J. und **Pohl R.** Eine Methode zur Bestimmung der Jonenbeweglichkeit in kleinen Gasmengen. *Verh. der Deut. phys. Ges.* 5, pag. 69, 1907.

Soddy F. The positive Charge carried by the α-Particle. *Nature.* 75, pag. 438, 1907.

Bloch E. Sur l'ionisation par le phosphore. *Radium*, 4, pag. 66, 1907.

Kucera B. Sur le rayonnement du polonium. *Radium,* **4**, pag. 75, 1907.

Rutherford E. Vitesse et énergie des particules α des substances radioactives. *Radium,* **4**, pag. 84, 1907.

Barus C. On distributions of nuclei and ions in dustfree Air. *Phys. Rev.* **24**, pag. 232, 1907.

Gates F. C. On the conductivity of the Air caused by certain compounds during Temperature-change. *Phys. Rev.* **24**, pag. 246, 1907.

Eve A. S. Die Absorption der γ-Strahlen radioaktiver Substanzen. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 183, 1907.

Eve A. S. Ueber das Verhältnis der Aktivitäten von Radium und Thor, gemessen durch ihre γ-Strahlung. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 188, 1907.

De Broglie M. Conditions de formation des centres électrisès de faible mobilité dans le gaz. *Compt. Rend.* **144**, pag. 563, 1907.

Blanc G. A. La costante di disintegrazione del Radiotorio. *Rend. Acc. Lincei.* (5), **16**, pag. 201, 1907.

Gallarotti A. Della jonizzazione dei gas in rapporto alla loro temperatura. *Rend. Acc. Lincei,* (5). **16**, pag. 297, 1907.

Righi A. La moderna teoria dei fenomeni fisici. Bologna, 1907. 8.

14. Elettrotecnica. Telefonia e Telegrafia.

Poincaré H. Étude du récepteur téléphonique. *Éclair. électr.* **50**. pag. 257, 1907.

Menges C. L. R. E. Ueber die Anschauungen, auf denen die Differentialgleichung der Kommutierung beruht. *Elektr. Zeit.* XXVIII, pag. 209, 1907.

Schmidt K. E. F. Störungen in einen geerdeten Empfangssystem für drahtlose Telegraphie mit doppelter täglicher Periode. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 133, 1907.

Kuhn J. Eine graphische Darstellung der Elektrizitätsmenge und Arbeit des Wechselstromes von sinusartigem Verlauf. *Elektr. Zeit.* 28, pag. 217, 1907.

— Die Quecksilberdampf-Lampe von Bastian. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 223, 1907.

Dolezalek F. und **Möller H. G**. Ueber Beseitigung der ungleichmässigen Stromverteilung in Wechselstromleitern. *Ann. der Phys.* (4). **22**, pag. 559, 1907.

Pierce G. W. Experiments on Resonance in Wireless Telegraph Circuits, Part V. *Phys. Rev.* **24**, pag. 152, 1907.

W. M. Karborund als Wellenanzeiger *Elektr. Zeit.* **28**, pag. **245**, 1907.

Erskine-Murray J. A Handbook of wireless Telegraphy. Crosby Lockwood & Son. London, 1907.

Heany J. A. Lampe à incandescence à filament de titane. *Éclair. électr.* **50**, pag. 434, 1907.

Sack H. Das Drehstrom-Wattmeter der Siemens-Halske A. G. und eine Neukonstruktion ihres Präzisions-Wattmeters. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 268, 1607.

Eminger. Die Magnetit-Bogenlampe. *Dinglers Polyt. Journ.* **388**, pag. 11-26, 1907.

15. Unità.

Grimsehl E. Experimentelle Einführung der elektromagnetishen Einheiten. *Sonderhefte der Zeit. für phys. u. chem. Unt.* Bd. II. Heft. 2, 1907.

16. Misure. Apparecchi.

Olper L. Impiego del relais polarizzato con correnti di direzione costante. *Elettricista.* (2), **6**, pag. 49, 1907.

Gradenwitz A. Segnale d'allarme per alta e bassa temperatura. *Elettricista.* (2), **6**, pag. 56, 1907.

Schl. Ein Quecksilberkommutator. *Deut. Mech. Zeit.* 1907, pag. 8.

Kücht R. und **Retschinsky T.** Temperaturmessungen im Quecksilberlichtbogen der Quarzlampe. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 595. 1907.

Northrup E. F. An optical Device for Deflection Instruments. *Phys. Rev.* **24**, pag. 222, 1907.

Bidlingmaier Fr. Ueber eine höchst empfindliche Methode zur Untersuchung von Inhomogenitäten in magnetischen Feld. Ein neuer Galvanometertypus. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 176, 1907.

Castellani L. La trasmissione elettrica della fotografia. *Boll. Soc. Fot. It.* **19**, pag. 8, 1907.

H. Fisica terrestre e Meteorologia.

1. Generalità. Teorie.

— Inondation marine sur le côtes de Belgique, de Hollande et d'Allemagne. *Rev. Scient.* (5), **7**, pag. 248, 1907.

Hollmann M. Wetterkunde. Eine allgemeinverständliche Anleitung zur Beurteilung der Wetterlage. 8°, 52 pag. Berlin, P. Parey, 1907.

— Meteorological Observations. *Nature.* **75**, pag. 448, 1907.

Angot A. Traité élémentaire de météorologie. II éd. VI+417 pag. Paris. Gauthier-Villars, 1907.

Krebs H. Was ist morgen für Wetter? 59 pag. Berlin, S. Mode, 1907.

Spariosu B. Wissenschaftlich begründete Wetter-Prognose für das Jahr. 1907. Kremsmünster.

2. Geodesia. Misure geodetiche e di gravità.

— Science in India. *Nature*, **75**, pag. 403, 1907.

3. Magnetismo terrestre. Correnti telluriche. Luce polare.

Sénouque A. Sur la diminution de l'intensité du champ magnétique terrestre en fonction de l'altitude, dans le massif du M. Blanc. *Compt. Rend.* **144**, pag. 535, 1907.

4. Studio dell'alta atmosfera.

— Die Forschungsreise S. M. S. « Planet ». *Ann. d. Hydr.* **35**, 1, pag. 1, 1907.

Linke F. Meteorologische Drachenaufstiege in Samoa. *Ill. Aer. Mit.* **11**, pag. 74, 1907.

Shaw W. N. On the Use of Kites in Meteorological Research. *The Aer. Journal.* N. 41, pag. 2, 1907.

Rosenthal E. Drachenaufstiege in Küstengebiet der Ostsee. *Ill. Aer. Mit.* **11**, pag. 47, 1907.

5. Meccanica e termodinamica dell'atmosfera. Venti.

Hann J. und **Walker G. T.** Ueber die Beziehungen der SW-Monsunregenfalles in Indien zu den Witterungszuständen entfernter Gegenden. *Met. Zeit.* **24**, pag. 74.

Börnstein R. Die halbtägigen Schwankungen der Temperatur und des Luftdruckes. *Met. Zeit.* **24**, pag. 79.

6. Ottica dell'atmosfera.

Bemporad A. L'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri. 4°, 110 pag. Roma, E. Loescher, 1907.

Hunt H. F. A remarkable Lunar Halo. *Nature*, **75**, pag. 439, 1907.

Kremár J. Halo-Erscheinung. *Met. Zeit.* **24**, pag. 87, 1907.

7. Elettricità atmosferica.

Nodon A. L'influence électrique du Soleil. *Rev. Scient.* (5), **7**, pag. 225, 1907.

Blanc G. A. On the Radioactive Matter in the Earth and the Atmosphere. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 378, 1907.

8. Temperatura del suolo.

9. Terremoti e vulcani.

Milne J. Seismological Notes. *Nature.* **75**, pag. 402, 1907.

Glangeaud Ph. Des divers modes de l'activité vulcanique dans la chaîne des Puys. *Compt. Rend.* **144**, pag. 403, 1907.

Field A. M. A New Volcanic Island. *Nature*, **75**, pag. 414, 1907.

Herglotz G. Ueber das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 145, 1907.

Hobbs W. H. On some principles of seismic geology. *Beitr. zur Geophysik.* 8, pag. 219, 1907.

Hobbs W. H. The geotectonic and geodynamic aspects of Calabria and Northeastern Sicily. *Beitr. zur Geophysik.* 8, pag. 293, 1907.

Oldham R. D. The Valparaiso Earthquake. *Nature.* 75, pag. 439, 1907.

Glangeaud Ph. Les laves et les minéraux des volcans de la chaîne des Puys. Age et cause des éruptions. *Compt. Rend.* 144, pag. 527, 1907.

Eastman C. R. Les éruptions du Vesuve pendant la première partie du moyen-age. *Rev. Scient.* (5), 7, pag. 37, 1907.

Mullet F. R. A new Mud-Volcano Island. *Nature.* 75, pag. 460, 1907.

Ricciardi L. Il vulcanismo nella Mitologia e nella scienza. Napoli, 1907.

10. Climatologia.

Eredia F. La piovosità a Roma. *Rend. Acc. Lincei.* (5), **16**, pag. 224, 1907, I sem.

— Die Witterung an der deutschen Küste in November 1906. *Ann. d. Hydr.* 35, pag. 1, 46, 1907.

Eredia F. I venti in Italia. *Boll. Soc. Aer. It.* 4, pag. 16, 1907.

Derôme J. La météorologie de l'année 1906. *Rev. Scient.* (5), 7, pag. 55, 1907.

Dorscheid O. Die mittlere Dauer des Frostes auf der Erde. *Met. Zeit.* 24, pag. 49, 1907.

Burchard O. Ein Beitrag zur Klimatologie der Kanarischen Inseln. *Met. Zeit.* 24, pag. 64, 1907.

König W. Resultate der meteorologischen Beobachtungen von Islote de los Evanjelistas. 1899-1904. *Met. Zeit.* 24, pag. 81, 1907.

Maurer J. Meteorologische Beobachtungen auf dem Tödigipfel. *Met. Zeit.* 24, pag. 84, 1907.

Mac Dowal A. B. Periodisches Auftreten eines frühen Frühjahrs. *Met. Zeit.* 24, pag. 87, 1907.

— Observaciones meteorological hechas en el Colegio Maximo de la Compania de Jesus en Ona (Burgos), 1907.

Ottweiler E. Die Niederschlags - Verhältnisse von Deutsch - Süd-west Afrika. Berlin, 1907.

Henriet H. L'atmosphère des villes. *Rev. gén. des Scienc.* 18, pag. 183, 1907.

Mac Dowall A. B. Rothesay Rainfall and the Sun-Spot Cycle. *Nature.* 75, pag. 488, 1907.

— The Weather Reports of the Meteorological Office. *Nature*, 75, pag. 488, 1907.

n. Apparecchi.

Blum G. Appareil simple reproduisant toutes ler particularités de l'expérience de Foucault sur la rotation de la terre. *Compt. Rend.* 144, pag. 364, 1907.

Nimführ R. Ueber eine neue automatische Abstellvorrichtung der Schreibfedern von Registrierapparaten für unbemannte Freiballons und eine neue Methode der Fixierung der Diagramme. *Ill. Aer. Mit.* **11**, pag. 78, 1907.

— Un nouveau Statoscop. *L'Aéronautique.* Gennaio 1907.

L. Storia della fisica.

Lefranc A. Pascal est-il un faussaire ? *Rev. Scient.* (5), **7**, pag. **241**, 1907,

Foerster W. Zur Entwickelungsgeschichte der Zeitmessung und der Kreiseinteilung. *Himmel u. Erde.* **19**, pag. 145, 1907.

M. Trattati.

Gibson C. R. Electricity of To-day: is Work and Mysteries described in Non Technical Language. XIV+347 pag. London. Seely and Co. 1907.

Corbin H. E. and **Stewart A. M.** Handbook of Physics and Chemistry. 3 ed. London. Churchill, 1907.

Margat l'Huillier L. Leçons de physique à l'usage de l'enseignement secondaire des jeunes filles et des aspirantes au brévet superieur. 7 éd. Paris, Vuibert et Nony, 357 pag., 1907.

Ashworth J. B. Heat, Light, and Sound. Introductory Course of practical Exercises. p. 136. Whittaker, 1907.

Jamieson A. Pratical Elementary Manual of Magnetism and Electricity. 7 ediz. 414 pp. Griffin, 1907.

Lemoine J. et **Vincent G.** Cour élémentaire de physique. 2 ed. VIII+408 pp. Paris, 1907.

Shenstone W. A. New Physics and Chemistry. 370 pp. Smith, & E. 1907.

Watson W. Text-book of practical Physics. 642 pp. Longmans, 1907.

A. Pochettino.

LIBRI NUOVI

ZWÖLF VORLESUNGEN ÜBER DIE NATUR DES LICHTES.

Dott. J. CLASSEN.

(Leipzig, G. J. Göschen, 1905).

Questo libro contiene quanto dall' A. è stato detto nelle lezioni tenute nell'inverno 1904-05 in Amburgo, e conserva il carattere puramente sperimentale di queste lezioni destinate a dare una conoscenza esatta e sufficientemente estesa delle varie teorie a scopo di coltura generale.

In tutta l'opera l'A. si preoccupa di tradurre sempre con imagini familiari le leggi che nelle lezioni gli occorrono; tuttavia sa conservare al suo discorso non solo una grande precisione, ma anche una notevole brevità.

Fin da una prima lettura il libro appare come un insieme organico di parti delle quali ben si distingue l' importanza. Stabilito il principio fondamentale che la luce segue nel propagarsi la via otticamente più breve, l' A. passa ad esporre i classici esperimenti dell' ottica fisica, che dimostrano che la luce si propaga per ondulazioni trasversali, e di essi mette in luce tutta la portata filosofica. La teoria ondulatoria del Fresnel si adatta maravigliosamente a spiegare nei più piccoli particolari i fenomeni luminosi, traendo le sue conclusioni dalla ipotesi di un mezzo perfettamente elastico. Ma la perfetta somiglianza dei fenomeni elastici e luminosi non ci deve far concludere per la loro identità, giacchè può trattarsi in questo caso di uno di quei parallelismi così frequenti in natura e pei quali in due campi assolutamente separati hanno applicazione le stesse leggi formali. È quindi giustificato l'indagare se altri fenomeni vi siano che con la luce abbiano uguale rapporto che i fenomeni elastici.

Così l'A., ci introduce nello studio delle oscillazioni elettriche, delle quali riproduce i fenomeni corrispondenti a quelli

dell'ottica e delle quali accenna le applicazioni a la telegrafia senza fili. Poi l'A. dimostra che tali onde si propagano con la velocità della luce e che gli indici di rifrazione dei varî mezzi per le ondulazioni elettriche concordano abbastanza bene con quelli relativi alle onde luminose.

In tal modo viene stabilito che le onde elettriche non differiscono dalle onde luminose che per il periodo di vibrazione e che la luce non è altro che un particolare fenomeno elettromagnetico.

LEÇONS SUR LA VISCOSITÉ DES LIQUIDES ET DES GAZ
par MARCEL BRILLOUIN.

(Gauthier Villars, Paris, 1907).

L'autore, previo un rapido cenno storico degli studi e delle esperienze sul problema della viscosità, prende a trattare in modo per quanto è possibile completo la teoria dei movimenti lenti di un fluido viscoso dal punto di vista della *idrodinamica classica;* senza riferirsi cioè a movimenti interni analoghi alla diffusione, i quali trovano più naturalmente il loro posto nelle teorie molecolari della viscosità.

Nella trattazione teorica è fatta anche larga parte allo studio di alcuni problemi speciali, quali sono il movimento rettilineo ad una dimensione (trascinamento di un liquido viscoso per mezzo di un piano mobile, movimento entro pareti fisse) etc. Soprattutto si insiste sui moti oscillatorî e rotatorî di un solido di rivoluzione immerso in un liquido viscoso, come quelli sui quali sono per lo più fondati i sistemi di misura del coefficiente di attrito interno.

La seconda parte del libro riguarda più che altro la misura sperimentale del coefficiente di attrito interno dei liquidi puri (acqua e mercurio) e la dipendenza di questo dalla pressione e dalla temperatura. Un ultimo capitolo è dedicato al regime di Poiseuille, al regime idraulico e al passaggio da l'uno a l'altro regime.

Concludendo, il libro del Brillouin riesce una trattazione completa del problema della viscosità dei liquidi puri e per ciò

utilissimo a quanti si occupano dello studio di questo fenomeno semplicissimo fra tutti quelli *irreversibili*; quindi da augurarsi che il secondo volume riguardante l' attrito interno dei gas segua presto il p imo. S. C.

Libri inviati per recensione

P. DUHEM — « Les origines de la statique ». Tome 1er (1905) et Tome 2e (1906).
(Libraire Scientifique A. Hermann. Paris).

Dott. H. BAUMHAUER — « Die Neuere Entwickelung der Kristallographie ». 1905.
(Friedr. Vieweg und Sohn. Braunschweig).

Dott. K. SCHREBER und Dott. SPRINGMANN — « Experimentierende Physik ». 1905.
(J. Ambrosius Barth. Leipzig. Mk. 8,60).

J. NILLARD GIBBS. « The Scientific papers of ». 2 vol. 1906.
(Longmans, Green. & Co. London).

FRÉDR. SWARTS — « Cours de chimie organique ». 1906.
(Libr. Scientif. A. Hermann. Paris).

C. TISSOT — « Étude de la resonance des systèmes d'antennes dans la télégraphie sans fil ». 1906.
(Gauthier Villars. Paris).

ERNEST KEMPKE — « Der Porträt und Gruppenphotograph beim Setzen und Beleuchten ». 1906.
(Wilhelm Knapp. Halle a. S. Mk. 1,20).

Dott. MAX PLANK — « Theorie der Wärmestrahlung ». 1906.
(J. Ambrosius Barth. Leipzig. Mk. 7,00).

Dott. E. SEDLACZEC — « Die Tonungsvafahren von Entwickelungspapieren ». 1906.
(Wilhelm Knapp. Halle a. S. Mk. 4).

Dott. P. FERCHLAND und Dott. P. REHLANDER — « Die elektrochemischen Deutschen Reichspatente ». 1906.
(Wilhelm Knapp. Halle a. S. Mk. 10).

Dott. R. LUCION « Elektrolytische Alkalichloridzerlegung mit flüssigen Metallkathoden ». 1906.
(Wilhelm Knapp. Halle. a. S. Mk. 9).

A. E. H. LOVE — « Mathematical theory of elasticity ». Seconda ediz. 1906.
(University Press. Cambridge).

P. LENARD — « Ueber Kathodenstrahlen ». 1906.
(J. Ambrosius Barth. Leipzig. Mk. 1,20).

Dott. PAUL GRUNER — « Die radioaktiven Substanzen und die Theorie des Atomzerfalles ». 1906.
(A. Francke. Bern).

Dott. HERMANN KOBOLD — « Der Bau des Fixternsystems ». 1906.
(Friedr. Vieweg und Solm. Braunschweig. Mk. 5,60).

J. R. RYDBERG — « Elektron der Erste Grundstoff ». 1906.
(W. Iunk. Berlin. Mk. 1).

Dott. R. BÖRNSTEIN — « Leitfaden der Wetterkunde ». 1906.
(Friedr. Vieweg und Sohn. Braunschweig).

Père R. CIRERA S. J. — « Notice sur l'Observatoire et sur quelques observations de l'éclipse 30 Août 1905 ». 1906.
(Gustavo Gili. Barcelone. Frs. 4).

ANDREW N. MELDRUM — « Avogadro and Dalton. The standing in chemistry of their hypotheses ». 1906.
(James Thin. Edinburgh).

ALOYS MÜLLER — « Elementare Theorie der Entstehung der Gezeiten ». 1906.
(J. Ambrosius Barth. Leipzig. Mk. 2,40).

PIERRE DUHEM — « Recherches sur l'élasticité ». 1906.
(Gauthier-Villars. Paris).

Dott. JULIUS EPHRAIM — « Deutsches Patentrecht für Chemicher ». 1907.
(Wilhelm Knapp. Halle a. S. Mk. 18).

TH. HOFMEISTER — « Der Gummidruck und seine Verwendbarkeit als Rünstlerisches Ausdrucksmittel in der Photographie ». 1907.
(Wilhelm Knapp. Halle a. S. Mk. 2).

Ing. JOSEPF LÖWY — « Was sind und wie Entstehen Erfindungen? » 1907.
(A. Hartleben. Leipzig. Mk. 1.

Dott. MAX SCHLÖTTER — « Ueber die elektrolytische Gewinnung von Brom und Jod. ». 1907.
(Wilhelm Knapp. Halle a. S. Mk. 2,40).

O. D. CHWOLSON — « Traité de physique ». Tome 1r, fasc. 3e: « L'état liquide et l'état solide des corps ». 1907.
(Librairie Scientifique A. Hermann, Paris. Frs. 12).

Prof. LUDWIG BOLTZMANN — « Populäre Schriften ». 1905.
(J. Ambrosius Barth. Leipzig. Mk. 8).

NOTIZIARIO

Il 12 Aprile ebbero luogo le solenni onoranze al prof. Righi in occasione del suo venticinquesimo anniversario di insegnamento e della sua prima lezione nel nuovo Istituto di Fisica dell'Università di Bologna. La Società Italiana di Fisica vi era rappresentata dal presidente Volterra, dal vice-presidente Battelli, dai consiglieri Bonacini e Cardani, dal segretario Sella. Dopo la lezione del prof. Righi dal tema « Sulla ipotesi della natura elettrica della materia » il prof. Blaserna Presidente del Comitato per le onoranze gli presentò il busto in bronzo offerto da amici ed ammiratori; vennero lette numerose adesioni nazionali ed estere, fra le quali a notarsi quella dell'Università di Erlangen, che nominò il Righi dottore « honoris causa »; il rettore dell' Università di Bologna annunciò la notizia della nomina del Righi a grande ufficiale della Corona d' Italia; il Sindaco di Bologna gli presentò una medaglia d' oro offerta dalla cittadinanza e finalmente il professor Volterra gli fece dono, a nome della Società Italiana di Fisica, della prima copia, elegantemente rilegata in pergamena, della conferenza del Dessau sull'opera del Righi, tenuta a Roma per iniziativa della Presidenza della Società il giorno 13 Marzo. A tutti rispose il Righi con nobili parole di ringraziamento.

La conferenza del Dessau è stata mandata a tutti i Soci della Società Italiana di Fisica.

— La Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, ha conferito la medaglia Matteucci a Sir W. Ramsay e la medaglia d'oro per la matematica al prof. G. Lauricella in Catania.

— La Società Geografica Italiana ha conferito al Duca degli Abruzzi la medaglia d'oro Umberto I; ed ha nominato membro d'onore Peary e socio corrispondente Amundsen, entrambi per le loro esplorazioni polari.

— Lord Lister ha celebrato il suo ottantesimo anniversario nello scorso 5 Aprile.

— Il Congresso degli Stati Uniti ha votato un ingente fondo per l'erezione a Washington di un monumento a Cristoforo Colombo.

— Le due medaglie d'oro della Società Geografica Inglese sono state conferite quest'anno al dott. Moreno per le sue esplorazioni nell'America del Sud ed al capitano Amundsen per le sue esplorazioni polari.

— L'Università di Glasgow ha conferito il titolo di dottore « honoris causa » al prof. Ulisse Dini in Pisa ed al professor H. Poincaré in Parigi.

— A Brantford (Ontario) verrà elevato un monumento in onore di A. Graham Bell, il quale inventò il Telefono in quella città.

— La medaglia Rumford per scoperte riguardanti la luce ed il calore è stata, dalla American Academy of Arts and Sciences, assegnata al prof. E. F. Nichols dell'Università di Columbia.

— Col 1° Gennaio il prof. E. Mascart si è ritirato dal posto di Direttore dell'Ufficio Meteorologico Francese. Gli è succeduto A. Angot.

— A. Lawrence Rotch, fondatore e direttore del « Blue Hill Meteorological Observatory » è stato nominato professore di Meteorologia nell'Università di Harward (S. U).

— Il dott. H. T. Barnes è stato chiamato a sostituire il prof. E. Rutherford nella cattedra di Fisica sperimentale dell'Università Mc Gill di Montreal (Canadà).

— W. Bjerknes, professore di Fisica sperimentale nella Università di Stocolma, e stato nominato professore di Meccanica e Fisica matematica nell'Università di Cristiania.

— Il prof. Lenard è passato dalla cattedra di Fisica nell'Università di Kiel all'analoga di Heidelberg.

— Il 18 Marzo è morto nel suo ottantesimo anno Marcelin Berthelot. La sua opera scientifica è stata enorme e ri-

guarda quasi tutti i campi della chimica. Importantissimi sono i suoi lavori sulla sintesi delle sostanze organiche, cominciati con quella dei grassi e proseguiti poi con la sintesi degli elementi di numerosissime sostanze organiche come l'acetilene, l'acido cianidrico, il benzolo. Importanti pure sono i suoi studi di chimica vegetale, continuati per lunghi anni nel laboratorio di Meudon. Più specialmente riguardano la fisicochimica altri suoi lavori, e principalissimi quelli di termochimica. Questa branca di scienza può quasi dirsi fondata da lui insieme col suo grande emulo, il danese Thomsen. Ambedue questi scienziati hanno misurato i calori di reazione di quasi tutte le reazioni conosciute, ed i loro dati hanno tanto maggiore valore in quanto sono stati trovati indipendentemente e con metodi diversi. Berthelot ha anche dedotto dalle sue esperienze varî principî generali; va ricordato fra questi il suo famoso terzo principio, che dice che una reazione avviene nel senso in cui si formano i prodotti accompagnati da maggiore sviluppo di calore, e che discusso per lungo tempo e con grande animazione, è ora riconosciuto non avere validità generale.

Numerose applicazioni dei dati termochimici furono poi fatte da Berthelot, e fra queste si possono citare quelle relative alle sostanze esplosive da lui accuratamente studiate. Anche il processo stesso dell'esplosione attrasse la sua attenzione, ed in modo particolare l'andamento dell'onda di esplosione.

Grande importanza storica hanno poi i suoi studi in collaborazion con Péan de Saint Gilles sulle velocità di reazione nella eterificazione e saponificazione e sugli equilibri che in queste reazioni si formano. Da questi sono direttamente partiti i lavori fondamentali di chimica cinetica di Guldberg e Waage e di van' t Hoff.

Di Berthelot sono inoltre da rammentarsi i lavori storici sull'origine dell'alchimia e sulla chimica nel medio evo, varî scritti di filosofia scientifica, e gran numero di pubblicazioni che riassumono i lavori da lui compiuti nei varî rami della chimica.

La Francia ha voluto degnamente onorare questo grande suo figlio accogliendone le spoglie nel Pantheon.

— Si annunzia la morte: dell'ing. Serpollet, propugnatore dell'applicazione dei motori a vapore all'automobilismo; del colonnello Laussedat, che diede grande sviluppo alle applicazioni topografiche della fotografia; del sig. Franz Hergen, direttore dell'Osservatorio del San Gottardo, perito in una bufera di neve; di E. Hospitalier, professore di elettrotecnica presso la Scuola Municipale di Fisica e Chimica industriale di Parigi noto per il suo formulario ed il suo ondografo.

— Il dott. Schlik ha eseguito a bordo di una nave esperienze molto interessanti per dimostrare l'efficacia di un giroscopio di sua invenzione, atto a stabilizzare la nave, riducendo fortemente i movimenti di rullio e beccheggio.

— Forti scosse di terremoto si sono avute a Bitlis nel 29 e nel 31 Marzo, a Messico il 15 Aprile.

— A. H. Preece ha dimostrato innanzi all'Istituzione degli Ingegneri Civili Inglesi l'importanza che va acquistando nelle miniere l'applicazione dell'energia elettrica.

— Secondo ricerche recenti di Minchin il quarzo fuso presenta un minimo di densità verso — 46°.

— La collezione delle memorie classiche, edite dall'Ostwald si è arricchita recentemente di lavori di Poinsot, Cauchy, I. Bertrand, Cayley, Grotthus, Hankel, Dutrochet, Q. Sella, Iacobi, Toepler.

— In quest'anno verrà tenuto a Londra un Congresso sulle unità elettriche, in cui si vorrebbe stabilire due sole unità fondamentali, cioè l'Ohm internazionale definito dalla lunghezza e sezione di una colonna di mercurio, e l'Ampère internazionale definito dal deposito di argento nell'unità di tempo.

— Le prove di aeroplani indette dall'Aero Club di Londra hanno sortito infelice successo.

— Le recenti misure Geodetiche negli Stati Uniti danno per il raggio equatoriale della terra metri 6.378.283 e per il polare 6.356.888 risultando per lo schiacciamento della terra 1/237,8.

— Si annunzia che il sig. W. Wellman tenterà nuovamente nell'estate ventura di raggiungere il Polo Nord mediante l'areonave « America », partendo dallo Spitzberg.

— Al sig. Gruhn dobbiamo interessanti esperienze sull'odore dei metalli; pare si tratti dell'emissione di un gas, analogamente a quanto avviene per l'emanazione dei corpi radioattivi, soggetti a disgregamento.

— Ecco secondo l' « Equipment of the United States Navy Departement », la lista delle stazioni di telegrafia senza fili attualmente esistenti: Italia 18, Belgio 1, Danimarca 4, Germania 13, Francia 6, Inghilterra 43, Olanda 8, Spagna 4, Portogallo 1, Gibilterra 2, Malta 1, Montenegro 1, Norvegia 1, Austria 2, Romania 2, Russia 8, Svezia 3, Turchia 6, Repubblica Argentina 5, Brasile 5, Canadà 5, Chilì 2, Costarica 1, Messico 1, Panama 1, Uruguay 1, Stati Uniti 88, Isola della Trinità 1, Isole Adamon 2, Birmania 1, Hong Kong 1, Cina 5, Hawai 6, Giappone 2, Indie Occidentali 5, Russia Asiatica 1, Egitto 2, Marocco 2, Mozambico 2, Tripoli 1.

— L'Associazione Francese per l'avanzamento delle Scienze ha destinato di sovvenzionare le seguenti ricerche scientifiche: Studio fotometrico dello splendore dei piccoli pianeti (Ch. André); Apparecchi per le applicazioni della fotografia allo studio delle Scienze Naturali (Trutat); Potere catalitico e sintetico del nero di platino (Causse); Topografia dei ghiacciai della Tarantasia (Girardin).

— Il 45° « Congrès des Sociétès Savantes » si è aperto il 2 Aprile a Montpellier, sotto la presidenza del prof. Darboux.

— Le manifestazioni straordinarie di macchie solari nel principio del Febbraio scorso sono state accompagnate da violente perturbazioni magnetiche, osservate in Europa e negli Stati Uniti.

— Il prof. Q. Majorana ha ottenuto distinte comunicazioni telefoniche fra l'Istituto Telegrafico Centrale e la Stazione di Monte Mario, alla distanza di 4 Km., facendo uso del suo microfono idraulico e del metodo Paulsen per generare onde permanenti.

— A Parigi si è fondata una Società per la costruzione di case universitarie, il cui scopo è di mettere a disposizione dei lavoratori intellettuali abitazioni adatte ed a buon prezzo.

— Il prof. Lauricella (Catania) ci comunica che il titolo del suo corso dato nel fascicolo precedente va corretto in : Applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla Fisica Matematica.

Atti della Società di Fisica.

Resoconto delle sedute tenute fra i Soci a Roma

I. Seduta del 13 Dicembre 1906. (Anfiteatro dell' Ufficio Centrale Telegrafico). Pres. Volterra.

Q. Majorana. Il nuovo sistema Paulsen di telegrafia senza fili.

Ricordata l' importanza dell'uso di onde non smorzate per la telegrafia senza fili ed il modo di funzionare dell'arco cantante del Duddel, il socio Majorana mostra la nuova disposizione del Paulsen e con essa ripete le principali esperienze del Tesla, dimostrando poi la rilevante energia irraggiata e la sensibilità dell'apparecchio Paulsen alla sintonia.

II. Seduta del 22 Dicembre 1906. (Istituto di Fisica) Pres. Volterra.

Il Presidente espone lo scopo delle riunioni della Società e cioè dimostrazione di esperienze nuove, riassunto dei più recenti progressi della scienza, scambio di idee sui metodi e sui criteri dell'insegnamento. A questo ultimo proposito ricorda come la Matematica abbia da tempo iniziato un severo esame critico dei propri principî fondamentali, e vorrebbe che la Società si facesse iniziatrice di una revisione logica anche per la Fisica. Egli invita i Soci ad organizzare un lavoro comune per tendere allo scopo delineato.

Il socio *Sella,* al fine di avviare la discussione e la revisione proposte dal Presidente, rileva alcune inesattezze che non di rado si incontrano nei libri scolastici; ne segue un breve sunto.

Moto uniforme. Nella definizione del moto uniforme, come moto per il quale in tempi eguali vengono percorsi spazi eguali, non si insiste abbastanza sul fatto che per misurare

i tempi, si deve ammettere, per convenzione, l'esistenza di un corpo, che si muove con moto uniforme ed al quale poi si riferisce la misura del tempo.

Pendolo di riversione. Soventi non si avverte esplicitamente che le distanze dei due centri di oscillazione dal centro di gravità non debbono essere eguali.

Pendolo di Foucault. Dal punto di vista puramente sperimentale non si vede come dallo spostamento angolare del piano di oscillazione di un pendolo, così come viene mostrato, si possa dedurre senz'altro che esso è dovuto alla rotazione della terra, non essendovi modo di presentare un pendolo il cui piano non ruoti.

Massa dei pianeti. Affermano alcuni autori potersi determinare la massa dei pianeti presupponendo solo la conoscenza delle leggi di Keplero, che suppongono la massa dei pianeti trascurabile rispetto a quella del sole.

Aberrazione della luce. L'ordinaria dimostrazione metterebbe in serio imbarazzo l'insegnante al quale lo studente domandasse se, riempiendo d'acqua il cannocchiale, si deve cambiare l'inclinazione di questo.

Termometria. Non è raro incontrare l'affermazione che i gas si dilatano regolarmente, dimenticando che si è supposto che la temperatura sia misurata col termometro a gas.

Maree. L'ordinaria spiegazione rende difficile il capire come le due azioni del sole e della luna si sommino, quando la terra si trova fra il sole e la luna.

Elettrometro a quadranti. Mentre l'ago mobile viene succhiato da entrambe le coppie di quadranti, ed il momento agente risulta dalla differenza di due momenti contrarii, si insegna soventi che l'ago viene attratto dalla coppia a potenziale di segno contrario e respinto dalla coppia a potenziale del medesimo segno; ovvero che l'ago, se a potenziale positivo, tende a portarsi in luoghi ove il livello elettrico è più basso, ovvero ancora che l'ago si volge sempre verso quella coppia, che è a potenziale di segno opposto al proprio. E così avviene che alla domanda fatta ad uno studente, da che parte si volga l'ago a + 10 fra due coppie di cui l'una sia

a terra e l'altra a + 30, ovvero di cui l'una sia a — 10 e l'altra a + 40, segue quasi sempre una risposta sbagliata.

Il socio Sella termina avvertendo che le sue osservazioni non hanno altro fine che di richiamare l'attenzione sopra qualche lacuna e qualche inesattezza, di cui ha conservato il ricordo qua e là, ma propone che il lavoro di revisione voluto dal Presidente si faccia per ordine, cominciando per es. dai principii fondamentali della Meccanica.

Il socio *Blanc* espone e discute le conseguenze delle *ricerche dello Strutt sulla proporzione di radio contenuta nelle roccie terrestri,* aggiungendo che da recenti sue ricerche risulterebbe che una buona parte della radioattività della crosta terrestre è dovuta al *torio,* che sembra assai diffuso in natura.

III. Seduta del 12 Gennaio 1907. (R. Istituto fisico). Pres. Volterra.

Il prof. *Reina* espone alcune osservazioni circa le considerazioni svolte dal socio Sella nella seduta precedente.

Il socio *Sella* dopo di avere accennato alle esperienze istituite nel passato per cercare *la pressione della luce,* sino alle recenti di Lebedew, Nichols e Hull, Poynting che ne hanno dimostrata l'esistenza, espone e discute le conseguenze astronomiche notate dal Poynting, (*Royal Institution 11 Maggio 1906*). Egli passa poi a rilevare l'incertezza che c'è nel calcolo del valore di essa pressione a seconda delle diverse teorie. Così mentre la teoria elettromagnetica conduce per un corpo nero ad un valore della pressione eguale a quello dell'energia unitaria luminosa, la teoria dell'emissione conduce ad un valore doppio. Invece il Hirn, pur partendo da un punto di vista cinetico, giunge allo stesso valore del Maxwell e così il Bartoli, con considerazioni puramente termodinamiche, cioè all'infuori da ogni ipotesi. Egli ritiene che la causa di queste divergenze meriterebbe di essere approfondita.

Il socio *Pochettino* dimostra alcune eleganti *esperienze di aerodinamica* dovute ad Alexander, Poul la Cour, Ria-

bouschinsky (*Bulletin de l'Institut Aerodynamique de Koutchino Nr. 1*).

Il socio *Trabacchi* presenta un'*esperienza da scuola sulle oscillazioni forzate* per dimostrare come un sistema vibrante di frequenza m possa eccitare le vibrazioni di un sistema di frequenza $m + n$, qualora l'eccitazione venga interrotta con frequenza n. Egli si serve di tre pendoli elettromagnetici di frequenza 3,5,2 e fa vedere che il pendolo (3) mette in azione il pendolo (5) solo quando il circuito elettrico che li mette in comunicazione viene interrotto due volte nell'unità di tempo dal pendolo (2).

IV. Seduta del 26 Gennaio 1907. (R. Istituto fisico). Pres. Volterra.

Il Presidente annuncia che il Congresso della Società sarà tenuto quest'anno in Parma, contemporaneamente al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, di cui espone i fini.

Il socio *Vanni* espone alcune considerazioni sulla definizione della massa, e vorrebbe fosse adottata nella Scuola quella del Mach e dell'Appell. Nota gli inconvenienti di considerare la forza centrifuga come una forza fittizia senza chiarire il significato della locuzione; fa delle osservazioni su certe definizioni incomplete del concetto di lavoro, che si trovano in alcuni trattati elementari di Fisica.

Segue una discussione, a cui prendono parte i signori *Giacomelli, Bonetti, Silla.*

Il socio *Palazzo* parla sull'alta pressione verificatasi in Europa sulla fine di Gennaio, mostrando i relativi diagrammi isobarici.

V. Seduta del 16 Febbraio 1907. (Istituto fisico). Pres. Volterra.

Il Socio *Vailati* espone alcune sue osservazioni critiche a proposito della connessione che il Duhem, nella sua recente opera sulle origini della Statica, tenta stabilire tra le considerazioni applicate nell'opuscolo Aristotelico « Sui problemi meccanici » alla spiegazione del principio della leva, e le pro-

posizioni relative al moto e alle forze enunciate da Aristotile nella Fisica e nel trattato del Cielo.

Si riprende la discussione sui principî della Meccanica. Il prof. *Silla* presenta una tabella da lui compilata sulle diverse definizioni date dagli autori sulla massa e ne discorre. Prendono in seguito la parola i signori *Vanni, Castelnuovo, Silla, Piola, Vailati, Goretti, Giacomelli.* Il Presidente riassume le opinioni e le proposte formulate [1]).

VI. Seduta del 2 Marzo 1907. (R. Istituto fisico). Presid. Volterra.

Il Presidente comunica una lettera del prof. *Garbasso,* in cui si lamentano le conseguenze del R. Decreto 11 Novembre 1904 relativo all'opzione fra Greco e Matematica nei Licei e propone un voto in cui si insista nuovamente per l'abolizione di esso. In seguito a considerazioni del prof. *Vanni,* il Presidente propone che la discussione dell'importante tema sia rimandata al prossimo Congresso di Parma.

Il socio *Piola* espone le ricerche recenti del Cremieu sulla gravitazione.

Il socio *Pochettino* riassume le recenti esperienze di Landolt, Heydweiller, Lo Surdo sulle presunte variazioni di peso nelle reazioni chimiche, fermandosi specialmente sui risultati del Landolt (Berliner Berichte 1906), che ritiene essere le perdite di peso osservate dovute alla separazione di particelle materiali, capaci di attraversare le pareti dei recipienti.

Si riprende la discussione sui metodi di insegnamento della fisica; parlano a proposito della definizione dell' unità di peso i soci *Alessandrini, Ascoli, Giorgi.*

VII. Seduta del 13 Marzo 1907. (R. Istituto fisico). Pres. Volterra.

Il Presidente legge una lettera del prof. *Righi,* che ringrazia del pensiero di dedicare la presente seduta al ricordo del suo lavoro scientifico.

1) Dei risultati della discussione sulla massa verrà dato, alla fine di essa, un esteso e ragionato resoconto.

Il prof. *Dessau* tiene una conferenza dal titolo: *L'opera di Augusto Righi.* Il testo di essa verrà distribuito ai soci a cura della Presidenza. Su proposta del socio *Pochettino* viene inviato al prof. Righi il seguente telegramma:

« Società Italiana di Fisica, raccolta a ricordare vostra grande opera scientifica illustrata conferenza Dessau, manda riverente omaggio illustre maestro ».

Hanno fatto adesione alla Società i signori:

Bellucci Prof. Italo	Roma, Istituto Chimico
Bisconcini Prof. Giulio	Roma, Via Ostilia 10
Bruschi Raffaele	Bologna, Via S. Giacomo 9
Carosi Prof. Emilio	Spello, (Perugia) Via Giulia 23
Chiarini Prof. Vittorio	Rimini, Scuola Tecnica
Cialdea Dott. Umberto	Roma, Via Marforio
Mieli Dott. Aldo	Roma, Istituto Chimico R. Univers.
Monti Prof. Virgilio	Roma, Via Nomentana 63
Pacini Dott. Domenico	Roma, Uffic. Centrale di Meteorologia
Reggiani Prof. Napoleone	Roma, Salita del Grillo 1
Sarno Prof. Alfredo	Norcia, (Perugia)
Scarpa Dott. Oscar	Napoli, R. Scuola Super. Politecnica
Silla Prof. Lucio	Roma, Piazza S. Pietro in Vincoli 5
Teofilato Prof. Pietro	Roma, Via Montebello 19

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCCXXIX.

Hanno pagato la quota del 1906 i Soci:

Buscemi Vincenzo	Oddone Emilio
Consani Dario	Platania Giovanni
Fornari Ugo	Rabitti Paolo
Gucci Pietro	Sandrucci Alessandro
Guglielmo Giovanni	Segalin Leandro
Leone Leonardo	Teglio Emilio

Hanno pagato la quota del 1907 i Soci.

Bordoni Ugo
Cialdea Umberto
Cardani Pietro
Dessau Bernardo
Folgheraiter Giuseppe
Finocchi Eusebio
Giuganino Luigi
Gucci Pietro
Guglielmo Giovanni
Lussana Silvio
Magrini Silvio
Marcucci Salvino
Mieli Aldo
Pacini Domenico
Razeto Michele
Reggiani Napoleone
Rolla Luigi
Semmolà Eugenio
Somigliana Carlo
Tieri Laureto

PIETRO SALVIONI, *gerente responsabile.*



Serie V. Vol. XIII. Maggio 1907.

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

PUBBLICATO PER CURA DEI DIRETTORI

A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA

E DEI DELEGATI DELLA SOCIETÀ

G. P. GRIMALDI ED A. SELLA

INDICE

PISA DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1907

SULL' EQUILIBRIO DEI SOLIDI ELASTICI DISGREGATI.

Nota di E. ALMANSI [1]).

1. — Sia (S) un solido elastico isotropo, che occupi lo spazio S limitato dalla superficie Σ. Il solido (S) sia in equilibrio sotto l'azione di forze di massa, e di forze applicate agli elementi della sua superficie. Denotiamo con (D) lo stato di deformazione in cui esso si trova.

Immaginiamo ora lo stesso solido diviso in un grandissimo numero di particelle p estremamente piccole; e ammettiamo che il solido (S), così *disgregato*, si conservi in equilibrio nello stato di deformazione (D) purchè sia soddisfatta questa condizione: *che per ogni elemento della superfice di contatto fra due particelle* p, *l'angolo* θ *formato dalla pressione che si esercita sopra una delle due faccie dell'elemento, colla normale uscente dalla faccia opposta, non superi un certo valore* Θ *compreso fra* 0 *e* $\frac{\pi}{2}$ (angolo d'attrito).

Noi ci possiamo proporre di fare uno studio di quelle speciali deformazioni (D) che rappresentano degli stati di equilibrio *anche per il solido disgregato*. A tal fine converrà considerare le particelle p come infinitesime, ritenere, cioè, che la condizione

$$\theta \lesseqgtr \Theta$$

debba esser verificata per *qualunque* elemento di supefice situato nello spazio S.

L'esame di quegli stati d'equilibrio di un solido elastico per cui questa condizione è soddisfatta, conduce ad alcuni resultati non privi d'interesse.

1) Io riprendo qui, semplificandone la trattazione, un argomento di cui mi ero già occupato in altra mia Nota (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XL); ed applico ad alcuni casi particolari i resultati ivi ottenuti, che qui ritrovo.

2. — La forza di massa applicata all' elemento di (S) che occupa lo spazio dS abbia per componenti X dS, Y dS, Z dS. Denotiamo poi con

$$p_{11}, p_{22}, p_{33},$$
$$p_{23}=p_{32}, p_{31}=p_{13}, p_{12}=p_{21}$$

le sei *pressioni interne* fondamentali, intendendo, per es., che p_{11}, p_{12}, p_{13} rappresentino le componenti, secondo i tre assi coordinati, della pressione agente sulla faccia di un elemento normale all'asse delle x che guarda nel verso *negativo* dell' asse.

Queste sei funzioni devono verificare le tre condizioni di equilibrio

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial p_{11}}{\partial x}+\frac{\partial p_{12}}{\partial y}+\frac{\partial p_{13}}{\partial z}=X, \text{ ecc.}$$

ed altre sei equazioni a cui, nell' ipotesi che X, Y, Z siano costanti, possiamo dare la forma:

$$\text{(2)} \qquad \Delta^2 p_{11}=-2h\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad \Delta^2 p_{12}=-2h\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, \text{ ecc.}$$

essendo $Q=p_{11}+p_{22}+p_{33}$, e h una costante positiva. La funzione Q soddisfa all'equazione

$$\Delta^2 Q=0.$$

3. — Dalla cond. $\theta \gtrless \Theta$, e dalle eq. (1), possiamo dedurre varie conseguenze. Incominciamo dal dimostrare il Teorema:

Se un elemento di superficie $d\sigma$, passante per un punto a del solido disgregato non è soggetto a pressione, nessun elemento passante per a è soggetto a pressione.

Le componenti p_1, p_2, p_3 della pressione che agisce sopra una delle due faccie di un elemento di superficie sono espresse dalle formule

$$\text{(3)} \qquad p_1=p_{11}\cos\alpha+p_{12}\cos\beta+p_{13}\cos\gamma, \text{ ecc.}$$

ove $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ denotano i coseni direttori della normale uscente dalla faccia opposta.

Prendiamo il punto a come origine delle coordinate, una delle due normali a $d\sigma$ come asse delle z, gli assi delle x e delle y ad arbitrio. La pressione che agisce su $d\sigma$ essendo nulla, avremo in a

$$p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0.$$

Consideriamo un elemento $d\sigma'$ passante per a e per l'asse delle y ($\cos\beta = 0$). Le componenti della pressione P che agisce su $d\sigma'$, per le formule (3), saranno:

$$p_1 = p_{11}\cos\alpha\,,\ p_2 = p_{21}\cos\alpha\,,\ p_3 = 0\,;$$

quindi:

$$\mathrm{P} = |\sqrt{p_{11}^2 + p_{21}^2}\cos\alpha|\,.$$

La componente normale di P è data in generale dalla formula:

$$\mathrm{N} = p_1\cos\alpha + p_2\cos\beta + p_3\cos\gamma.$$

Nel nostro caso sarà:

$$\mathrm{N} = p_1\cos\alpha = p_{11}\cos^2\alpha\,.$$

Se $p_{11}^2 + p_{12}^2$ fosse diverso da zero, il rapporto

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} = \pm\frac{p_{11}}{\sqrt{p_{11}^2 + p_{12}^2}}\cos\alpha$$

rappresenterebbe il coseno dell'angolo θ formato da P colla normale a $d\sigma'$. Col tendere di α a $\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ tenderebbe a zero, dunque θ, per valori di α abbastanza vicini a $\frac{\pi}{2}$, sarebbe certamente maggiore dell'angolo acuto Θ, onde la condizione $\theta \leqq \Theta$ non resulterebbe verificata.

Dovrà quindi essere $p_{11}^2 + p_{12}^2 = 0$, e perciò $\mathrm{P} = 0$. Ma $d\sigma'$ può rappresentare un elemento qualunque passante per a, l'asse delle y essendo arbitrario nel piano di $d\sigma$: il teorema è dunque dimostrato.

Da esso si deduce che se una parte Σ_0 della superficie Σ che limita il sistema disgregato non è a contatto con altri

corpi, se cioè nessuna pressione agisce sopra i suoi elementi, la pressione sarà pure nulla per qualunque elemento di superfice passante per un punto di Σ_0. In altre parole, nei punti di Σ_0 tutte e sei le pressioni p_{11}, p_{12}, ecc. devono esser nulle.

4. — Sia a un punto della superfice libera Σ_0 (che supporremo ammetta ovunque un piano tangente determinato). Prendiamo il punto a come origine delle coordinate, la normale interna come asse delle z.

Poichè nei punti di Σ_0 le pressioni $p_{11}, p_{12}, \ldots$ sono tutte nulle (§ 3), e nel punto a la superficie è tangente al piano xy, in quel punto dovranno esser nulle anche le derivate delle pressioni rispetto ad x e ad y. Quindi le formule (1) daranno:

$$\frac{\partial p_{31}}{\partial z} = \mathrm{X}, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = \mathrm{Y}, \quad \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = \mathrm{Z}.$$

Sull'asse delle z prendiamo un punto a' inf.te vicino ad a. Nel punto a' sarà a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$p_{31} = (p_{31})_a + \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right)_a . dz, \text{ ecc.},$$

ovvero, essendo $(p_{31})_a = 0$, $\left(\frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right)_a = \mathrm{X}$, ecc.

$$p_{31} = \mathrm{X}\, dz, \quad p_{32} = \mathrm{Y}\, dz, \quad p_{33} = \mathrm{Z}\, dz.$$

Ma p_{31}, p_{32}, p_{33} sono le componenti della pressione che agisce sull'elemento passante per a', normale all'asse delle z (e precisamente sulla faccia che guarda nel verso negativo dell'asse). Dunque:

La pressione che agisce sopra un elemento di superfice parallelo ed inf.te vicino alla superfice libera, ha la direzione della forza di massa.

E poichè la pressione non può formare colla normale all'elemento un angolo maggiore di Θ:

In un punto qualunque della superfice libera la normale interna non può formare colla forza di massa agente in quel punto un angolo maggiore di Θ.

È ben nota questa proprietà dei sistemi disgregati in equilibrio.

5. — La condizione $\theta \leqq \Theta$ richiede che in ogni punto di S le tre pressioni normali p_{11}, p_{22}, p_{33} siano positive o nulle. Positiva o nulla dovrà esser pure la loro somma Q.

Se la forza di massa è costante, la Q è una funzione armonica (§ 2).

Queste proprietà della funzione Q ci permettono di dare una maggiore estensione al teorema del § 3.

Supponiamo che sopra un elemento $d\sigma$, passante per un punto a situato *nell'interno* dello spazio S non agisca nessuna pressione. Nel punto a sarà, in virtù di quel Teorema, $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$, quindi $Q = 0$. Consideriamo una sfera s col centro in a e tutta situata entro S. Per il *teorema della media* avremo $\int_s Q\, d s = 0$. Dovendo essere ovunque $Q \geqq 0$, sarà $Q = 0$ in tutti i punti di s, e per una nota proprietà delle funzioni regolari armoniche, in tutto lo spazio S.

Ma non può essere $Q = 0$ se non essendo $p_{11} = p_{22} = p_{33}$, e l'annullarsi delle pressioni normali p_{11}, p_{22}, p_{33} porta come conseguenza che sia pure $p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0$, altrimenti sugli elementi di superfice normali agli assi agirebbero delle tensioni tangenziali, sarebbe cioè $\theta = \frac{\pi}{2} > \Theta$.

Potremo enunciare pertanto il seguente teorema :

Se un elemento di superfice passante per un punto a, situato nell' interno dello spazio S non è soggetto a pressione, nessun elemento del sistema è soggetto a pressione.

La dimostrazione non vale quando il punto a si trova sulla superfice che limita lo spazio S, poichè allora non è possibile costruire la sfera s tutte contenuta entro S.

6. — Noi vogliamo ora esaminare più a fondo il caso che una parte σ_0 della superfice libera Σ_0 appartenga ad un piano Π.

Ricordiamo un teorema relativo alle funzioni armoniche.

Se una funzione φ, *regolare ed armonica nello spazio* S, *si annulla, colla sua derivata rispetto alla normale interna, in tutti i punti di una regione* σ_0 *della superfice che limita* S, *essa è nulla in tutto lo spazio* S [1].

Da questo teorema segue immediatamente che se una funzione φ, armonica e regolare in S, assume nei punti di σ_0 un valore costante, e la sua derivata normale è nulla, o, ciò che è lo stesso, se nei punti di σ_0 si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\ ,$$

sarà $\varphi=$ cost. in tutto lo spazio S.

Se poi nei punti di σ_0 si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mathrm{X}\ ,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathrm{Y}\ ,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mathrm{Z}\ ,$$

ove X, Y, Z denotano delle costanti, sarà in tutto lo spazio S

$$\varphi=\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z+\mathrm{U}\quad(\mathrm{U}=\text{cost.})$$

come apparisce dal considerare la funzione armonica $\varphi-(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z)$ le cui tre derivate sopra σ_0 si annullano.

Ciò premesso, veniamo al nostro sistema, supponendo che una parte σ_0 della sua superfice sia libera ed appartenga ad un piano Π.

Posta l' origine delle coordinate in un punto di σ_0, prendiamo come asse delle z la normale rivolta verso l'interno di S. Nei punti di σ_0 si annulleranno le sei pressioni, e le loro derivate rispetto ad x e ad y: onde avremo:

1) V., per es., la mia Nota: “ Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi „. R. Acc. dei Lincei, 1907.

$$
(4) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0 \, , \\[2mm]
\dfrac{\partial p_{31}}{\partial z} = X \, , \quad \dfrac{\partial p_{32}}{\partial z} = Y \, , \quad \dfrac{\partial p_{33}}{\partial z} = Z \, . \\[2mm]
Q = 0 \, , \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \, , \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \, .
\end{array}
\right.
$$

Poniamo :

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
p_{31} = \left(X - k \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) z + \varphi_1 \, , \\[2mm]
p_{32} = \left(Y - k \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) z + \varphi_2 \, , \\[2mm]
p_{33} = \left(Z - k \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right) z + kQ + \varphi_3
\end{array}
\right.
$$

Da queste formule si ricava

$$
\frac{\partial p_{31}}{\partial z} = X - k \frac{\partial Q}{\partial x} - k z \frac{\partial^2 Q}{\partial x \, \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \, ,
$$

$$
\frac{\partial p_{32}}{\partial z} = Y - k \frac{\partial Q}{\partial y} - k z \frac{\partial^2 Q}{\partial y \, \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \, ,
$$

$$
\frac{\partial p_{33}}{\partial z} = Z - k z \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \, .
$$

quindi, per le (4), nei punti di σ_0 $(z = 0)$ sarà :

$$
\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \, , \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \, .
$$

Ma le funzioni φ_1, φ_2, φ_3 sono armoniche nello spazio S. Infatti dalle formule (5), ricordando che $\Delta^2 Q = 0$, si ha :

$$
\Delta^2 p_{31} = - 2 k \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \Delta^2 \varphi_1 \, , \text{ etc.} \, ,
$$

e, per le (2), $\Delta^2 \varphi_1 = 0$, $\Delta^2 \varphi_2 = 0$, $\Delta^2 \varphi_3 = 0$. Ne viene di conseguenza che queste tre funzioni dovranno esser nulle in tutto lo spazio S. Onde le formule (5) diventeranno

$$(6)\qquad \begin{cases} p_{31}=\left(X-k\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)z\,, \\ p_{32}=\left(Y-k\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)z\,, \\ p_{33}=\left(Z-k\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)z+k\,Q\,. \end{cases}$$

Come si vede, le tre pressioni interne p_{31}, p_{32}, p_{33} sono esprimibili mediante la sola funzione Q.

7. — Valendoci delle formule precedenti possiamo ora dimostrare che non solo σ_0, ma *tutta la superficie libera* Σ_0 *deve appartenere al piano* Π.

Supponiamo infatti che una parte σ'_0 di Σ_0 non appartenga al piano Π; ivi sarebbe $z \gtrless 0$, e inoltre, come su tutta la superfice libera, $p_{31}=p_{32}=p_{33}=Q=0$, quindi per le formule (6)

$$k\frac{\partial Q}{\partial x}=X\,,\ k\frac{\partial Q}{\partial y}=Y\,,\ k\frac{\partial Q}{\partial z}=Z\,.$$

Dovrebbe allora aversi in tutto lo spazio S (v. § 6):

$$k\,Q=X\,x+Y\,y+Z\,z+U\ (U=\text{cost.}),$$

e perciò su tutta la superfice libera, ove $Q=0$,

$$X\,x+Y\,y+Z\,z+U=0.$$

Ma questa è l'equazione di un piano unico; e ciò è in contraddizione coll' ipotesi che alla sup. Σ_0 appartenga, oltre alla sup. σ_0 situata nel piano Π, una sup. σ'_0 fuori di questo piano.

Tutta la superfice Σ_0 deve dunque appartenere al piano Π.

8. — Supponiamo che lo spazio S occupato dal sistema sia un cilindro limitato da due sezioni Σ_0 e Σ_1 normali all'asse.

Posta l'origine delle coordinate in un punto O di Σ_0, prendiamo l'asse delle z parallela all'asse del cilindro: il suo verso positivo sia da Σ_0 a Σ_1.

In tutto il cilindro si abbia:

$$X = 0\,, \quad Y = 0\,, \quad Z = \text{cost.} > 0\,.$$

La base Σ_0 sia libera. Su ciascun elemento dell'altra base Σ_1, e della superfice laterale Σ' agisca una pressione *normale*.

Ci proponiamo di determinare tutti i possibili stati d'equilibrio del cilindro pei quali è verificata la solita condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$.

Varranno intanto le formule (6), ove si faccia $X = Y = 0$:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & p_{31} = -kz\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad p_{32} = -kz\frac{\partial Q}{\partial y}, \\ & p_{33} = Zz - k\left(z\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\right). \end{aligned} \right.$$

Nei punti della base Σ_1, affinchè la pressione che agisce sopra i suoi elementi resulti normale, dovrà essere $p_{31} = p_{32} = 0$, vale a dire $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{\partial y} = 0$, ossia $Q = \text{cost}$.

La pressione che agisce sugli elementi della superfice laterale ha per componenti

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= p_{11}\cos\alpha + p_{12}\cos\beta\,, \\ p_2 &= p_{21}\cos\alpha + p_{22}\cos\beta\,, \\ p_3 &= p_{31}\cos\alpha + p_{32}\cos\beta\,, \end{aligned} \right.$$

ove $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ denotano i coseni della normale interna.

Affinchè la pressione resulti normale dovrà essere

$$p_3 = 0\,, \quad p_2\cos\alpha - p_1\cos\beta = 0\,.$$

Esamino la condizione $p_3 = 0$, ossia

$$p_{31}\cos\alpha + p_{32}\cos\beta = 0\,.$$

Per le formule (7) essa diventa

$$-kz\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta\right) = 0\,,$$

$$(6)\qquad \begin{cases} p_{31}=\left(\mathrm{X}-k\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)z\,, \\ p_{32}=\left(\mathrm{Y}-k\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)z\,, \\ p_{33}=\left(\mathrm{Z}-k\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\right)z+k\,\mathrm{Q}\,. \end{cases}$$

Come si vede, le tre pressioni interne p_{31}, p_{32}, p_{33} sono esprimibili mediante la sola funzione Q.

7. — Valendoci delle formule precedenti possiamo ora dimostrare che non solo σ_0, ma *tutta la superficie libera* Σ_0 *deve appartenere al piano* Π.

Supponiamo infatti che una parte σ'_0 di Σ_0 non appartenga al piano Π; ivi sarebbe $z \gtrless 0$, e inoltre, come su tutta la superfice libera, $p_{31}=p_{32}=p_{33}=\mathrm{Q}=0$, quindi per le formule (6)

$$k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}=\mathrm{X}\,,\ k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}=\mathrm{Y}\,,\ k\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}=\mathrm{Z}\,.$$

Dovrebbe allora aversi in tutto lo spazio S (v. § 6):

$$k\,\mathrm{Q}=\mathrm{X}\,x+\mathrm{Y}\,y+\mathrm{Z}\,z+\mathrm{U}\ (\mathrm{U}=\text{cost.}),$$

e perciò su tutta la superfice libera, ove $\mathrm{Q}=0$,

$$\mathrm{X}\,x+\mathrm{Y}\,y+\mathrm{Z}\,z+\mathrm{U}=0.$$

Ma questa è l'equazione di un piano unico; e ciò è in contraddizione coll' ipotesi che alla sup. Σ_0 appartenga, oltre alla sup. σ_0 situata nel piano Π, una sup. σ'_0 fuori di questo piano.

Tutta la superfice Σ_0 deve dunque appartenere al piano Π

8. — Supponiamo che lo spazio S occupato dal sistema si un cilindro limitato da due sezioni Σ_0 e Σ_1 normali all'asse.

Posta l' origine delle coordinate in un punto O prendiamo l'asse delle z parallela all'asse del cilindr verso positivo sia da Σ_0 a Σ_1.

In tutto il cilindro si abbia:

$$X=0\,,\quad Y=0\,,\quad Z=\text{cost.}>0\,.$$

La base Σ_0 sia libera. Su ciascun elemento dell'altra base Σ_1, e della superfice laterale Σ' agisca una pressione *normale*.

Ci proponiamo di determinare tutti i possibili stati d'equilibrio del cilindro pei quali è verificata la solita condizione $\theta \gtrless \Theta$.

Varranno intanto le formule (6), ove si faccia $X=Y=0$:

$$(7)\qquad \begin{cases} p_{31}=-kz\dfrac{\partial Q}{\partial x}\,,\quad p_{32}=-kz\dfrac{\partial Q}{\partial y}\,,\\[2mm] p_{33}=Zz-k\left(z\dfrac{\partial Q}{\partial z}-Q\right). \end{cases}$$

Nei punti della base Σ_1, affinchè la pressione che agisce sopra i suoi elementi resulti normale, dovrà essere $p_{31}=p_{32}=0$, vale a dire $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{dQ}{\partial y}=0$, ossia $Q=\text{cost.}$

La pressione che agisce sugli elementi della superfice laterale ha per componenti

$$(8)\qquad \begin{cases} p_1=p_{11}\cos\alpha+p_{12}\cos\beta\,,\\ p_2=p_{21}\cos\alpha+p_{22}\cos\beta\,,\\ p_3=p_{31}\cos\alpha+p_{32}\cos\beta\,, \end{cases}$$

ove $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ denotano i coseni della normale interna.

Affinchè la pressione resulti normale dovrà essere

$$p_3=0\,,\quad p_2\cos\alpha-p_1\cos\beta=0\,.$$

samino la condizione $p_3=0$, ossia

$$p_{31}\cos [illegible] \cos\beta=0$$

formule (7) ess[illegible]

$$-kz\Big([illegible] \frac{\partial Q}{\partial y}\cos [illegible]$$

vale a dire

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = 0 \qquad (n = \text{norm. int.}) .$$

La funzione Q, armonica nello spazio S occupato dal cilindro, soddisfa dunque in superfice alle seguenti condizioni :

Sulla superfice laterale, la sua derivata rispetto alla normale interna è nulla.

Sulla base Σ_1 la Q acquista un valore costante, che denoteremo con Cz_1, z_1 rappresentando il valore di z nei punti di questa base.

Infine sulla base superiore Σ_0, che è libera, la Q deve annullarsi.

Tali condizioni resultano soddisfatte se poniamo

$$Q = Cz ,$$

nè può esistere, come è noto, un'altra funzione Q che soddisfi alle stesse condizioni.

Le formule (7) diventeranno allora :

$$(9) \qquad p_{31} = 0 , \quad p_{32} = 0 , \quad p_{33} = Z z .$$

Queste tre pressioni sono così determinate in tutto lo spazio S.

9. — Le eq. (1), tenendo conto delle (9), si riducono a :

$$(10) \qquad \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} = 0 .$$

La terza resulta già verificata.

Poichè Q, ossia $p_{11} + p_{22} + p_{33}$, e p_{33}, sono espresse dal prodotto di z per una costante, lo stesso avverrà di $p_{11} + p_{22}$. Poniamo $p_{11} + p_{22} = 2\,A\,z$, ossia :

$$(11) \qquad p_{22} = 2\,A\,z - p_{11} . \qquad (A = \text{cost.}) .$$

Le eq. (10), sostituendo nella seconda a p_{22} questa sua espressione, possiamo scriverle :

$$(12) \qquad \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial y} - \frac{\partial p_{12}}{\partial x} = 0 .$$

Da esse si ricava:

$$\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2 p_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial y^2}=0\,.$$

Ora le (2), essendo $Q = Cz$, danno: $\Delta^2 p_{11} = 0$, $\Delta^2 p_{12} = 0$: quindi, per le formule precedenti, avremo: $\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial z^2}=0$, $\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial z^2}=0$. Le funzioni p_{11}, p_{12} sono dunque lineari rispetto alla variabile z. Ma esse devono annullarsi sulla superfice libera, ossia per $z=0$: onde potremo porre:

$$p_{11}=z\,\phi_1(x\,,y)\,,\quad p_{12}=z\,\phi_2(x\,,y)\,. \tag{13}$$

Le eq. (12) daranno allora:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}=0\,,$$

perciò avremo:

$$\phi_1=\frac{\partial\phi'}{\partial x}\,,\quad \phi_2=\frac{\partial\phi'}{\partial y}\,,$$

ove ϕ' denota una funzione armonica delle variabili x, y; od anche

$$\phi_1=A+\frac{\partial\phi}{\partial x}\,,\quad \phi_2=\frac{\partial\phi}{\partial y}\,,$$

ove $\phi=\phi'-Ax$ è un'altra funzione armonica delle stesse variabili.

Per le formule (11) e (13) sarà:

$$p_{11}=z\left(A+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right),\quad p_{22}=z\left(A-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right),\quad p_{12}=z\,\frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{14}$$

10. — Riprendiamo la condizione

$$p_2\cos\alpha-p_1\cos\beta=0 \tag{15}$$

che deve esser verificata sulla superfice laterale del cilindro.

Dalle formule (8) e (14) abbiamo

$$p_1 = z\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \mathrm{A}\cos\alpha\right\},$$

$$p_2 = z\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\beta + \mathrm{A}\cos\beta\right\}.$$

Quindi la cond. (15) diventerà

$$(16)\qquad (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2\cos\alpha\cos\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0\,.$$

E basterà (poichè φ non contiene z) che essa sia verificata sul contorno di una sezione trasversale del cilindro, per es. la base Σ_0.

Ora sussiste — salvo qualche restrizione sulla natura di Σ_0 — il seguente teorema, che qui mi limito a dimostrare per il cerchio:

Una funzione φ, armonica e regolare in un'area piana Σ_0, che sul contorno verifica la formula (16), *è costante in tutta l'area.*

Applicando il principio della rappresentazione conforme, si estende facilmente il teorema ad una vastissima classe di aree.

Nel caso di un area circolare, posta l'origine delle coordinate nel centro, l'equazione (16) assume la forma:

$$(17)\qquad (x^2 - y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2xy\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0\,.$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta, al pari di φ, una funzione armonica, la quale, essendo nulla sul contorno, dovrà esser nulla in tutta l'area Σ_0. Poniamo ora

$$(18)\qquad (x^2 - y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2xy\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \psi\,.$$

Derivando l'eq. (18) rispetto ad x, la (17) rispetto ad y, e sommando, otteniamo $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. Derivando invece la (18) rispetto ad y, la (17) rispetto ad x, e sottraendo, si ottiene $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$. La ψ

è dunque una costante che dovrà essere uguale a zero, affinchè l'eq. (18) sia verificata per $x=y=0$.

Dalla eq. (17) e dalla (18) in cui si faccia $\psi=0$, si ricava $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$, ossia $\phi=\text{cost.}$, c. v. d.

Sostituendo nelle formule (14) avremo:

$$p_{11}=\mathrm{A}\,z\,,\quad p_{22}=\mathrm{A}\,z\,,\quad p_{12}=0\,.$$

Nelle sei pressioni interne rimane dunque indeterminata la sola costante A.

11. — Fin qui, della condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$ abbiamo tenuto conto solo in quanto essa richiede che nei punti di Σ_0 le sei pressioni p_{11}, p_{12}, etc. siano nulle. Noi dobbiamo però tener conto di quella condizione per tutti gli elementi di superfice situati nello spazio S.

Perciò osserviamo che alla condizione stessa può darsi una forma diversa.

In un punto qualunque a di un sistema continuo in equilibrio siano P', P'', P''' le tre *pressioni principali*. Considero un elemento qualunque $d\sigma$ passante per a.

Se per tutti gli elementi $d\sigma$ dovesse essere $\theta=0$ (caso dei fluidi), si troverebbe che le tre quantità P', P'', P''' dovrebbero essere uguali.

Quando θ è assoggettato alla condizione di non superare Θ, si trova che il rapporto fra due delle quantità P', P'', P''' deve esser compreso fra K ed $\frac{1}{\mathrm{K}}$, essendo

$$\mathrm{K}=\frac{1-\mathrm{sen}\,\Theta}{1+\mathrm{sen}\,\Theta}\,.$$

Tralascio, per brevità, la dimostrazione, a cui si può pervenire, in varii modi, partendo dalle formule

$$p_1=\mathrm{P}'\cos\alpha\,,\quad p_2=\mathrm{P}''\cos\beta\,,\quad p_3=\mathrm{P}'''\cos\gamma\,,$$

che danno le componenti, nelle direzioni di P', P'', P''', della pressione che agisce sopra un elemento $d\sigma$, e precisamente

sulla faccia opposta a quella da cui esce la normale che ha per coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ [1]).

Nel problema che abbiamo esaminato le tre pressioni principali sono, in un punto qualunque del solido, le stesse p_{11}, p_{22}, p_{33}, ossia Az, Az e Zz. Dunque la costante A dovrà esser compresa fra KZ e $\frac{K}{Z}$.

12. — Varii altri problemi si potrebbero studiare, intorno a quegli speciali stati d'equilibrio di un solido elastico, pei quali è verificata la condizione $\theta \lesseqgtr \Theta$.

Noi potremmo, per esempio, esaminare il caso che la superfice libera Σ_0 sia piana, ed abbia, rispetto alla forza di massa supposta costante, *la massima inclinazione compatibile coll'equilibrio:* il caso, cioè, che la normale a Σ_0, rivolta verso l'interno di S, formi colla forza di massa un angolo precisamente uguale a Θ (v. § 4).

Senza porre alcun'altra condizione, si trova che i soli stati d'equilibrio possibili sono quelli a cui corrispondono le pressioni interne:

$$p_{11} = \frac{2X^2 + Z^2}{Z} z, \quad p_{22} = Az, \quad p_{33} = Zz,$$

$$p_{23} = 0, \quad p_{31} = Xz, \quad p_{12} = 0,$$

ove A è una costante che deve esser compresa fra certi limiti, dei quali è facile determinare i valori.

---

1) Si può, per es., esprimere $\cos\theta$ in funzione di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, cercare il minimo valore che assume $\cos\theta$, e porre la condizione che esso non sia inferiore a $\cos\Theta$.

SOPRA LA COSTRUZIONE DEI RIFLETTORI.

di UMBERTO CISOTTI.

È noto che se si colpisce una superficie speculare parabolica con un fascio di raggi uscenti dal foco, i corrispondenti raggi riflessi risultano tutti paralleli all'asse.

Ciò accade rigorosamente se si tratta di una superficie geometrica e con molta approssimazione per un riflettore metallico.

Il fenomeno è un po' più complesso quando si tratta di riflettori nei quali la superficie speculare è protetta da una lastra di vetro. Poichè mentre nel primo caso non c'è da tener conto che del semplice fenomeno della riflessione, nel secondo interviene anche la rifrazione dei raggi attraverso il vetro.

Ecco come qualitativamente possiamo renderci conto del fenomeno. Un raggio incidente incontra la superficie σ, che separa il vetro dall'aria, penetra attraverso il vetro, accostandosi alla normale, indi batte contro la superficie speculare τ, si riflette e, ripassando attraverso σ dal vetro all' aria, si rifrange nuovamente allontanandosi dalla normale alla superficie.

In queste condizioni un riflettore parabolico ed a faccie (σ e τ) parallele fra loro, non è più atto a trasformare un fascio di raggi uscenti da un punto in un fascio di raggi paralleli.

Di ciò si sono ben reso conto i costruttori.

Per tentativi si è riesciti ad ottenere una speciale forma di riflettore a faccie parallele, che risponde molto bene ai voluti requisiti [1]).

1) Le officine Galileo di Firenze posseggono degli stampi in acciaio che servono ottimamente allo scopo. Devo questa ed altre indicazioni ancora alle cortesi comunicazioni del ch. prof. Lori, cui porgo i miei sentiti ringraziamenti.

Nella presente nota mi sono proposto di studiare la questione dal punto di vista teorico e sono arrivato alla seguente conclusione.

Assegnata una superficie rotonda σ ed un punto L fuori di essa e sull' asse, risulta *univocamente determinata (con sole operazioni in termini finiti)* una seconda superficie rotonda τ tale che, considerando σ e τ come faccie (rispettivamente anteriore e posteriore) di un riflettore i raggi luminosi uscenti da L emergono tutti nella direzione dell'asse.

E reciprocamente, assegnata una superficie rotonda τ ed un punto fuori di essa e sull'asse, risulta univocamente determinata una seconda superficie σ tale che considerando σ e τ come faccie (anteriore e posteriore) di un riflettore, questo si comporta nel modo voluto.

La sopraccennata corrispondenza fra σ e τ non ha più luogo: o quando σ è una calotta sferica ed L è il centro della sfera, od anche quando σ è un piano normale all'asse.

Ora il colonnello Mangin nella costruzione di un proiettore [1]) assegnò a σ precisamente la forma sferica e fissò per L il centro della superficie stessa.

La figura 1 mostra chiaramente il comportamento di un generico raggio uscente da L nel proiettore Mangin.

È manifesto che il colonnello Mangin nell' assegnare a τ la forma sferica si è limitato ad una soluzione approssimata.

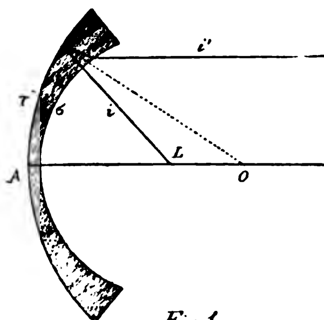


Fig 1

1) Violle. Cours de Physique, T. II, pag. 468.

Il Fresnel [1]) ideò invece un riflettore da lui chiamato *lente a scala* costituito da una lente piano-convessa di piccola apertura, circondata da una serie di anelli concentrici calcolati in modo che il fuoco della lente centrale coincida col fuoco della superficie di ciascun anello.

Ma dal punto di vista della effettiva costruzione interessa che le due faccie σ e τ sieno parallele.

Ed è in vista di ciò che mi sono proposto ancora di determinare la forma che ad esse compete in questa ipotesi, limitandomi ad un primo risultato approssimato: supponendo cioè così piccolo lo spessore del riflettore rispetto alla distanza focale da poterne risguardare il rapporto come quantità di primo ordine [2]).

Ritenendo σ e τ superficie di rotazione, esse sono determinate quando sieno assegnate le loro rispettive sezioni meridiane s_σ e s_τ.

Questa osservazione ci permette di trattare la questione a due dimensioni.

1. — Sia s la linea di separazione di due mezzi ottici nel piano delle due variabili x_1, x_2. Assunta in detto piano una coppia di assi cartesiani ortogonali, sieno $-X_j$ $(j=1, 2)$ i coseni direttori di un generico raggio i incidente in s, Y_j quelli del corrispondente raggio rifratto r (considerato nello stesso verso); n l'indice di rifrazione relativo ai due mezzi.

I coseni direttori della normale a s sono proporzionali a $X_j + n Y_j$ $(j=1, 2)$ cioè se rappresentiamo per un momento con

$$f(x_1\, x_2)=0$$

l'equazione di s, ricordando che le $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono pure proporzio-

1) Violle. Loco citato, pag. 464.

2) Avevo già ultimate queste mie ricerche, quando il ch. prof. Lori mi comunica la preferenza data oggidì, anche nella nostra Marina, ai riflettori parabolici metallici, nei quali si sono ottenuti dei vantaggi notevoli.

Tuttavia non credo che sia priva di interesse (oltre i teoremi generali) la soluzione approssimata che presento e che, almeno teoricamente, ha qualche vantaggio su quelle già conosciute.

nali ai coseni direttori della normale in un generico punto a s, avremo indicato con k un coefficiente di proporzionalità

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = k\,(X_j + n\,Y_j)\,. \quad (j = 1, 2)\,.$$

Ora sieno $x_j + d\,x_j$ le coordinate di un punto di s, infinitamente vicino al punto di coordinate x_j, dovremo avere

$$\sum_{1}^{2}{}_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\,d\,x_j = 0\,,$$

e per la precedente

(1) $$\sum_{1}^{2}{}_j\,(X_j + n\,Y_j)\,d\,x_j = 0\,.$$

Possiamo dunque dire che, assegnati due raggi i ed r, i cui coseni direttori sieno rispettivamente

$$-X_j \text{ e } Y_j \quad (j = 1, 2)$$

potremo risguardare il raggio r proveniente da i mediante rifrazione di indice n, purchè esista una linea s su cui è verificata la (1) [1]).

2. — Siano s_σ e s_τ due linee qualsiansi che determinano le tre regioni A, B, C; i un raggio proveniente da A incidente in s_σ in un punto P di coordinate x_j; r il corrispondente raggio rifratto, attraversante B, che incontra s_τ in un punto Q di coordinate y_j $(j = 1, 2)$; r_1 la prosecuzione di r in C. Chiamiamo n l'indice di rifrazione tra i mezzi A e B; n_1 quello relativo ai due mezzi B e C.

Se indichiamo con $-X_j$ $(j = 1, 2)$ i coseni direttori di i, i coseni direttori di r sono

$$\frac{y_1 - x_1}{\overline{PQ}}\,, \quad \frac{y_2 - x_2}{\overline{PQ}}\,.$$

1) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, T. II, pag. 275, ed anche T. Levi-Civita, Complementi al teorema di Malus-Dupin, Rendiconti Accad. dei Lincei, 1900.

ovvero posto

$$(2) \qquad \Delta = \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,,$$

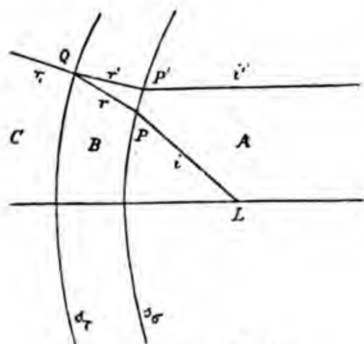


Fig. 2

i coseni direttori di r sono

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}$$

oppure

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_1}\,, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y_2}\,.$$

Indichiamo ancora con $\mathrm{Y_j}$ i coseni direttori di r_1; per la (1) dovremo avere sopra s^σ

$$(3) \qquad \sum_{1}^{2}{}_{j} \left(\mathrm{X_j} - n\frac{\partial \Delta}{\partial x_j}\right) d\,x_j = 0$$

e sopra s_τ

$$(4) \qquad \sum_{1}^{2}{}_{j} \left(-\frac{\partial \Delta}{\partial y_j} + n_1 \mathrm{Y_j}\right) d\,y_j = 0\,,$$

dove intenderemo le $\mathrm{X_j}$ funzioni di x_j e le $\mathrm{Y_j}$ funzioni delle sole y_j $(j = 1, 2)$.

Se il raggio r subisce in Q, in particolare una *riflessione* è

$$n_1 = -1\,,$$

e la (4) diviene

$$(4') \qquad \sum_{1}^{2} {}_{j}\left(Y_j + \frac{\partial \Delta}{\partial y_j}\right) d\, y_j = 0 .$$

Diciamo r' il raggio riflesso e $P'\,(x'_j)$ il suo punto di incontro con la s_σ: i coseni direttori di r', che abbiamo già indicati con Y_j sono, ponendo

$$(5) \qquad \Delta' = \overline{P'Q} = \sqrt{(x'_1 - y_1)^2 + (x'_2 - y_2)^2} ,$$

$$Y_j = -\frac{\partial \Delta'}{\partial y_j} = \frac{\partial \Delta'}{\partial x'_j} \qquad (j = 1, 2) .$$

Per queste, la (4') diviene

$$\sum_{1}^{2} {}_{j}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y_j} - \frac{\partial \Delta'}{\partial y_j}\right) d\, y_j = 0 ,$$

dalla quale scende che sopra s_τ dev'essere

$$\Delta - \Delta' = \text{costante.}$$

La costante del secondo membro è nulla, se si suppone che s_σ ed s_τ ammettano un asse di simmetria: per es. l'asse delle x_1. Infatti allora il raggio $x_2 = 0$ è normale alla s_σ ed alla s_τ, r coincide con r' e P con P' e quindi per questa coppia particolare $\Delta = \Delta'$; ma $\Delta - \Delta' = \text{cost.}$ per qualsiasi coppia quindi sarà sempre

$$(4'') \qquad \Delta = \Delta' .$$

Se chiamiamo i' il raggio emergente da P' e indichiamo con X'_j $(j = 1, 2)$ i suoi coseni direttori, per la (1) dovremo avere sopra s_σ ancora la relazione

$$(6) \qquad \sum_{1}^{2} {}_{j}\left(-\frac{\partial \Delta'}{\partial x'_j} + \frac{1}{n} X'_j\right) d\, x'_j = 0 .$$

3. — Consideriamo la congruenza dei raggi incidenti i passanti tutti per uno stesso punto L, la cui distanza dal ge-

nerico punto P di s_σ indichiamo con ρ, e la congruenza dei raggi emergenti t', normale alle linee coordinate x_2.

Posto

(7) $$F = \rho \ , \quad F' = x'_1$$

avremo

(8) $$X_j = \frac{\partial F}{\partial x_j} \ , \quad X'_j = \frac{\partial F'}{\partial x'_j} \qquad (j = 1, 2) \ .$$

Per queste la (3) e la (6) divengono rispettivamente

$$\sum_{1j}^{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - n\,\frac{\partial \Delta}{\partial x_j}\right) d\,x_j = 0 \ ,$$

$$\sum_{1j}^{2}\left(\frac{\partial F'}{\partial x'_j} - n\,\frac{\partial \Delta'}{\partial x'_j}\right) d\,x'_j = 0 \ ,$$

dalle quali scende che sopra s_σ devono essere soddisfatte le

(9) $$\begin{cases} F(x_1\, x_2) - n\,\Delta = \text{costante} \\ F'(x'_1\, x'_2) - n\,\Delta' = \text{costante.} \end{cases}$$

Da queste, tenendo conto della (4") si ha la relazione

(10) $$F'(x'_1\, x'_2) - F(x_1\, x_2) = \text{costante} \ ;$$

dove alla costante del secondo membro si può assegnare un valore tale che per un particolare punto di coordinate x_i la F cioè ρ abbia un valore prefissato.

4. — Sia ora s_σ una linea simmetrica rispetto all' asse x_1 definita dall'equazione

(11) $$\varphi(x_1\, x_2) = 0 \ ,$$

e sia L un punto prefissato sull'asse x_1 e del resto qualunque, purchè non situato sopra s_σ, nel piano delle variabili x_i $(i = 1, 2)$.

Si stabilisca sopra s_σ una corrispondenza di punti tale che al generico punto di coordinate x_i corrisponda un altro punto le cui coordinate x'_i sieno legate alle prime dalla relazione

(10) dove F ed F' hanno il significato espresso dalle (7) e dove la costante del secondo membro risulta determinata in modo che per $x'_i = x_i$ la F, cioè ρ ha un valore ben determinato per la opportuna scelta fatta del punto L.

Basterà a tal uopo assegnare come corrispondenti ad ogni coppia di valori x_i che soddisfanno la (11), i valori di x'_i definiti dalla (10) e dalla (11), dove al posto delle x_i si pongono le x'_i.

Sia s_τ una seconda linea la quale risulti determinata mediante s_σ nel seguente modo.

Ad ogni coppia di punti corrispondenti x_i e x'_i di s_σ si faccia corrispondere un punto y_i di s_τ, equidistante dai due punti x_i ed x'_i e la cui distanza comune Δ sia definita dalla prima delle (9).

In tali condizioni possiamo riguardare il fascio di parallele $x_1 = \text{cost.}$ proveniente dal fascio di raggi ρ uscenti da L mediante rifrazione di indice n attraverso a s_σ, riflessione su s_τ e nuova rifrazione di indice $\frac{1}{n}$ attraverso s_σ.

Infatti perciò è necessario e basta che sopra s_σ sieno soddisfatte le (9) e sopra s_τ la (4'). Ora quest'ultima è soddisfatta per la costruzione stessa di s_τ. Osserviamo inoltre che la prima delle (9) e la (10), tenuto conto della (4'), equivalgono alle (9).

Possiamo concludere che *assegnata una linea s_σ simmetrica rispetto ad un asse ed un punto* L *sull'asse, e fuori di essa, risulta univocamente determinata una seconda linea s_τ, tale che ad un fascio di raggi uscenti da* L *incidenti in s_σ corrisponde un fascio di raggi paralleli emergenti da s_σ*.

5. — Dopo ciò sembrerebbe naturale che, assegnata la s_τ si potesse determinare, con operazioni altrettanto semplici, la corrispondente s_σ.

Invece, come ora vedremo, data l'equazione di s_τ, l'equazione in termini finiti di s_σ dipende dalla integrazione di una equazione funzionale. Sia

$$\psi(y_1 y_2) = 0 \tag{12}$$

l'equazione definisce la s_τ, e sia L un punto prefissato dell'asse e del resto qualunque, perchè non situato su s_τ.

Dalla eliminazione di y_1 e y_2 dalle (12) e (4*) e dalla prima delle (9) si ottiene una relazione tra le x_j e x'_j $(j = 1, 2)$.

Da questa e dalla (10) si possono ricavare le x'_j in funzione delle x_j:

$$(13) \qquad x'_j = f_j(x_1 x_2) . \quad (j = 1, 2) .$$

Ammessa per un istante la esistenza della s_σ, la sua equazione sia la (11), che possiamo immaginare risoluta rispetto alla x_2 e precisamente sia

$$(11') \qquad x_2 = \bar{\varphi}(x_1) .$$

Consideriamo nei secondi membri delle (13) le f_j funzioni della sola x_1 direttamente e per mezzo delle (11'). Diciamo allora $\Phi(x_1)$ una funzione che soddisfa alla relazione

$$(14) \qquad \Phi(f_1) = f_2 ;$$

dico che

$$\Phi(x_1) = \bar{\varphi}(x_1)$$

e quindi che l'equazione di s_σ è per la (11')

$$x_2 = \Phi(x_1) .$$

Notiamo perciò che da

$$x'_2 = \Phi(x'_1) ,$$

e dalle (13) scende

$$f_2 = \Phi(f_1)$$

la quale non è altro che la (14).

La determinazione della s_σ dipende adunque dall'integrazione della equazione funzionale (14).

6. — Riferendoci al num. 4 osserviamo che assegnata la s_σ affinchè si possa stabilire su essa la corrispondenza dei punti x'_i ed x_i in modo che ad ogni coppia di valori x_i che rendono soddisfatta la (11) corrispondano i valori di x'_i definiti dalla

(10) e dalla (11), nella quale le x_i vanno sostituite con le x'_i, è necessario e basta che nè la F e nè la F' che compariscono nel primo membro della (10) abbiano valore costante sopra s_σ.

Infatti, nel caso contrario la (10) diverrebbe o

$$F'(x'_1\, x'_2) = \text{cost.}$$

oppure

$$F(x_1\, x_2) = \text{cost.}$$

e non sarebbe più possibile far corrispondere nel modo richiesto al generico punto x_i di s_σ un altro punto x'_i della stessa curva. Notiamo inoltre che la esistenza della s_τ dipende unicamente dalla possibilità di poter stabilire sopra s_σ la accennata corrispondenza.

Vi sono adunque solamente due casi, in cui assegnata la s_σ non si può determinare la corrispondente s_τ, e cioè quando F ed F' hanno valore costante, ovvero per le (7) quando

$$\rho = \text{cost. e } x'_1 = \text{cost.}$$

Nel primo caso s_σ è una circonferenza ed L è il suo centro, sul secondo s_σ è una retta parallela all'asse delle ordinate.

7. — Vediamo se nella corrispondenza univoca tra s_σ ed s_τ stabilita al numero 4, si può fare in modo che s_τ coincida con s_σ.

È manifesto che in tal caso s_σ agirà solo come profilo di riflessione.

Dovrà essere $\Delta = \Delta' = 0$ ed essendo inoltre $x'_i = x_i$, la (10) definisce il profilo s_σ.

Per le (7), la (10) diviene allora

$$(10') \qquad x_1 - \rho = \text{cost.},$$

dove

$$\rho = \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2},$$

essendo a la ascissa del punto L.

La (10') è l'equazione di una parabola.

In particolare, facendo

$$a=\frac{p}{4}$$

e chiamando $-\frac{p}{4}$ la costante del secondo membro, la precedente equazione definisce la parabola

$$x_2^2=p\,x_1 \,.$$

Il punto L è in tal caso lo stesso foco della parabola.

8. — Supponiamo ora che s_σ ed s_τ sieno linee parallele. Mi propongo di determinare l'equazione di s_σ. Mi limiterò al caso in cui lo spessore costante del profilo speculare sia tale da poter risguardare il rapporto di esso alla distanza focale come quantità di primo ordine.

Chiamiamo x ed y gli assi coordinati; $x_1\, y_1$ le coordinate del punto P_1 in cui il generico raggio incidente incontra s_σ; $x_2\, y_2$ le coordinate del punto P_2 in cui il corrispondente raggio emergente sorte da s_σ.

La (10) per le (7) diviene

$$x_2=\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{4}\right)^2+y_1^2}-\frac{p}{4}\,,$$

avendo chiamato $\frac{p}{4}$, 0 le coordinate del centro del fascio dei raggi incidenti e $-\frac{p}{4}$ la costante del secondo membro.

Ponendo

$$x_2=x_1+\varepsilon\,,$$

la precedente diviene

$$x_1+\varepsilon=\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{4}\right)^2+y_1^2}-\frac{p}{4}\,,$$

da cui si ricava

$$y_1^2=p\,x_1+2\,\varepsilon\left(x_1+\frac{p}{4}\right)+\varepsilon^2\,.$$

Considerando $P_1(x_1\, y_1)$ come un generico punto di s_σ ed ε funzione di x_1 potremo risguardare la precedente come l'equazione di s_σ e scrivere, chiamando x e y le coordinate x_1 e y_1,

$$y^2 = px + 2\varepsilon\left(x + \frac{p}{4}\right) + \varepsilon^2 . \tag{15}$$

9. — Si tratta di assegnare ad ε una espressione in termini di x in modo che s_σ si comporti nel modo richiesto.

Diciamo φ l'angolo che la corda $\overline{P_1 P_2}$ forma coll'asse delle x; θ l'angolo che $\overline{P_1 S}$ (e $\overline{P_2 S}$) forma colla corda $\overline{P_1 P_2}$; ψ quello formato da Δ con $\overline{P_1 S}$ (Δ' con $\overline{P_2 S}$); λ l'angolo di i' con la normale in P_2 a s_σ; δ quello che essa forma con Δ'; infine sia h la distanza costante QS delle due curve s_σ e s_τ.

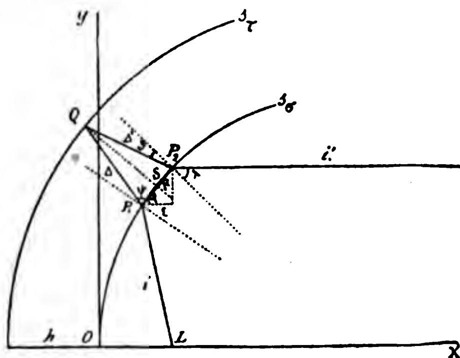


Fig. 3

Avremo

$$\varepsilon = \overline{P_1 P_2} \cos\varphi ,$$

$$\overline{P_1 P_2} = 2(h + \overline{RS}) \cot(\psi + \theta) ,$$

$$\overline{RS} = \frac{1}{2} \overline{P_1 P_2} \operatorname{tg}\theta ;$$

dalle quali si ricava per ε l'espressione

$$\varepsilon = 2h \frac{\cot(\psi + \theta)}{1 - \operatorname{tg}\theta} \cos\varphi . \tag{16}$$

Se introduciamo l'ipotesi che il rapporto $\frac{h}{p}$ tra lo spessore h e p sia quantità di primo ordine la (16) ci dice che $\frac{\varepsilon}{p}$ è pure quantità di primo ordine e quindi di essa sono trascurabili le potenze superiori alla prima.

Per ciò la (15) diverrà

$$(15') \qquad y^2 = p\,x + 2\,\varepsilon\left(x + \frac{p}{4}\right).$$

Inoltre in tale ipotesi, essendo il rapporto $\frac{\overline{P_1 P_2}}{p}$ quantità dello stesso ordine di $\frac{\varepsilon}{p}$ e $\frac{\operatorname{tg}\theta}{p}$ che sono quantità di ordine superiore al primo, potremo porre nella (16)

$$\theta = 0\,, \quad \cot\psi = \operatorname{tg}\delta\,,$$

ed otterremo per ε l'espressione

$$(16') \qquad \varepsilon = 2\,h\,\operatorname{tg}\delta\cos\varphi\,;$$

ma è

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\delta} = n\,,$$

$$\cos\varphi = \operatorname{sen}\lambda\,,$$

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1+\varepsilon}}\,;$$

da queste tre relazioni si deduce

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1+\varepsilon}}}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1+\varepsilon} + n^2 - 1}}\,.$$

Per queste la (16') diviene

$$\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1+\varepsilon}\right\}\left\{n^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=x_1+\varepsilon}+n^2-1\right\}}}.$$

Ricavando dalla (15') la $\frac{dy}{dx}$ per $x = x_1 + \varepsilon$ e tenendo conto solamente dei termini dí primo ordine si ottiene', ponendo x al posto di x_1, per ε l' espressione

$$\varepsilon = \frac{8hx}{\sqrt{\{4x+p\}\{4(n^2-1)x+pn^2\}}},$$

e portando questa espressione nella (15'), ricaviamo in definitiva l'equazione di s_σ sotto la forma

$$(15'') \qquad y^2 = px + 4hx\sqrt{\frac{4x+p}{4(n^2-1)x+pn^2}}.$$

10. — Applichiamo questo risultato ad un esempio pratico. Si abbia un riflettore a faccie (ε e τ) parallele e rotonde, la cui sezione meridiana abbia per linea s_σ la curva definita dall'equazione (15'').

Sia inoltre

$$p = 1680^{m.m.}$$
$$h = 10^{m.m.}$$
$$n = 1,54$$
$$d = 900^{mm.}\ [1],$$

avendo indicato con d il diametro del parallelo massimo del riflettore.

Posta una sorgente luminosa nel punto L dell'asse di rotazione, che dista di $\frac{p}{4} = 420$ mm. dal vertice della superficie interna del riflettore, i raggi emergenti non dovrebbero uscire

1) Di questi dati si servono le officine Galileo di Firenze per la costruzione dei riflettori.

da una superficie cilindrica le cui generatrici sono parallele all'asse, e la cui direttrice è il parallelo massimo del riflettore, se questo rispondesse in modo perfetto alle condizioni volute. Ma rappresentando la (15') soltanto una soluzione approssimata, è ovvio che detta superficie cilindrica nel nostro caso si ridurrà ad una superficie conica di rotazione, avente per direttrice ancora il parallelo massimo e per vertice un punto dell'asse (verso il quale, lo specchio rivolge la sua convessità) tanto più lontano quanto più il riflettore si avvicina alle condizioni ideali.

Con un calcolo, che non presenta nessuna difficoltà concettuale, ed il cui sviluppo, piuttosto laborioso, omettiamo per brevità, si trova nel nostro caso, che la distanza del vertice del cono dal fuoco è di circa 17300 mm., essendo l'angolo di apertura del cono non superiore a 1° 30' [1]).

Alla distanza di 10 km. il nostro riflettore espande quindi i suoi raggi sopra una superficie del diametro di circa 500 m.

---

1) Nei riflettori costruiti dalle officine Galileo di Firenze, adoperando come sorgente luminosa la scintilla dell'arco voltaico, l'angolo di apertura del cono è di 8°.

ALCUNE RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE DELLE RELAZIONI FRA IL PERIODO DI UNA SCARICA OSCILLANTE E L'INDUTTANZA, LA CAPACITÀ, LA RESISTENZA DEL CIRCUITO DI SCARICA.

Nota del Dott. MICHELE LA ROSA.

Le relazioni analitiche fra il periodo d'oscillazione T della scarica, e l'autoinduzione L, la capacità C, la resistenza R del circuito elettrico, nel quale la scarica ha luogo, non si prestano per un esame intuitivo del modo di variare di T, quando muta una delle tre grandezze L, C, R, mentre si lasciano costanti le altre due. Meglio, a questo scopo, si prestano delle rappresentazioni grafiche; ed è appunto di talune di esse, che vogliamo occuparci nella nota presente.

La relazione

$$(1) \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{4 L^2 C}{4 L - R^2 C}}$$

mantenendo costanti R e C, e ponendo $L = x$ e $T^2/4\pi^2 = y$, si trasforma nell' equazione:

$$(1') \qquad 4 C x^2 - 4 x y + R^2 C y = 0$$

che rappresenta un' iperbole, di cui il centro ha le coordinate:

$$(2) \qquad x_0 = \frac{R^2 C}{4} \quad y_0 = \frac{R^2 C^2}{2} ;$$

e gli assi hanno le equazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} y - \dfrac{R^2C^2}{2} = \left(C + \sqrt{1 + 2 C \cos \omega + C^2}\right)\left(x - \dfrac{R^2C}{4}\right) \\ y - \dfrac{R^2C^2}{2} = \left(C - \sqrt{1 + 2 C \cos \omega + C^2}\right)\left(x - \dfrac{R^2C}{4}\right) \end{cases}$$

dove ω è l'angolo degli assi coordinati.

Se, per semplicità, poniamo:

$$(4) \qquad \cos \omega = -\frac{1}{2\,C}, \text{ [1])}$$

queste equazioni si riducono alla forma:

$$(3') \qquad \begin{cases} 2\,C\,x - y = 0 \\ y - \dfrac{R^2C^2}{2} = 0 \end{cases}$$

e l'equazione dell'iperbole, riferita a questi assi, diventa:

$$-\frac{X^2}{\frac{R^2C^2}{16}} + \frac{Y^2}{\frac{R^2C^2}{4}\left(1 - \frac{1}{4\,C^2}\right)} = 1 \,.$$

Per costruire la curva, fissate nel piano due rette Ox, Oy che facciano fra loro l'angolo ω definito dalla (4), e segnato il centro O_1, di cui conosciamo le coordinate (2), possiamo tracciare i due assi di simmetria (fig. 1).

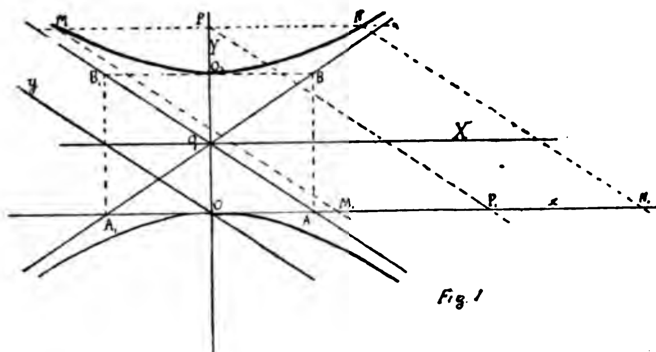


Fig. 1

1) Questa ipotesi richiede che sia $C > \frac{1}{2}$; e noi possiamo ritenere che tale condizione sia sempre soddisfatta, essendo in nostro arbitrio la scelta delle unità di misura (vedi fine) così di C, come delle altre grandezze. Però è bene osservare, che qualunque sia ω (e perciò indipendentemente da qualunque ipotesi su C), noi, con lo stesso procedimento, otterremo sempre una rappresentazione (forse meno semplice) in tutto conforme alla nostra.

Congiungendo O con O_1, si ottiene il primo (perchè la prima delle equazioni (3') è priva del termine noto); esso è normale ad Ox, perchè per ogni suo punto abbiamo:

$$(3'') \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{2C} = -\cos\omega,$$

ossia la x di un punto qualunque, è la proiezione normale della corrispondente y.

Il secondo asse sarà evidentemente, la parallela ad Ox, condotta per O_1.

Le lunghezze dei semiassi dell'iperbole, essendo rispettivamente:

$$\frac{R^2C}{4}, \text{ e } \frac{1}{2}R^2C^2\sqrt{1-\frac{1}{4C^2}} = \frac{1}{2}R^2C^2 \operatorname{sen}\omega$$

vengono nella figura rappresentate dai segmenti OA, OO_1; e gli assintoti dalle rette A_1B ed AB_1 (l'ultima delle quali è parallela ad Oy). La curva può allora venire facilmente tracciata.

Siccome nei casi fisici, la x può avere solamente valori positivi, la rappresentazione cercata risulta dal ramo dell'iperbole compreso nell'angolo BO_1B_1, e dall'arco dell'altro ramo compreso dentro l'angolo OO_1A, riferiti ai due assi Ox, Oy.

La figura mostra che, finchè x (cioè L) varia da zero ad $R^2C/4$ (punto A), y varia da zero a $-\infty$, e quindi T è immaginario; cioè la scarica nel sistema elettrico considerato è aperiodica. Quando x cresce, a partire dal valore $R^2C/4$, la y è sempre positiva; essa, dapprima infinita, decresce fino ad un minimo (punto O_2 della curva), e poi torna a crescere, tendendo nuovamente all'infinito.

Il valore del minimo è, come si rileva subito dalla stessa figura, $y = R^2C^2$ e corrisponde al valore $x = \frac{1}{2}R^2C$. Cioè, quando l'induttanza si fa crescere a partire dal valore limite $R^2C/4$, il periodo d'oscillazione è sempre reale; esso dapprima

decresce da infinito al valore minimo $2\pi RC \left(\text{per } L = \frac{1}{2} R^2 C\right)$. e poscia torna a crescere tendendo all'infinito; per conseguenza, un valore qualunque del periodo può ottenersi con due differenti valori di L, fra i quali passa una relazione molto semplice, che può ottenersi nel modo seguente:

Scelta una corda M N, parallela all'asse x, conducendo, per gli estremi di essa e per il punto P, le parallele ad Oy, si ottengono i punti M_1, P_1, N_1 che verificano la relazione:

$$O P_1 = \frac{O M_1 + O N_1}{2} ;$$

cioè, l'ascissa x_p del punto P, è uguale alla semisomma delle ascisse x_m, x_n di M e di N. Se dividiamo la precedente uguaglianza per l'ordinata comune y_p, avremo per la (3'):

$$\frac{x_p}{y_p} = \frac{x_m + x_n}{2 y_p} = \frac{1}{2 C}$$

ossia:

$$y_p = C (x_m + x_n) .$$

Questa relazione permette di calcolare il periodo d'oscillazione, quando si conosce la coppia dei valori di L, per i quali quel periodo può aversi.

Se si potesse, perciò, con un mezzo opportuno, giudicare soltanto dell'uguaglianza di due periodi, con semplici misure di capacità ed induttanza, si otterrebbe il valore del periodo, indipendentemente dalla resistenza del circuito elettrico.

La conoscenza di una coppia di valori di L, come quella che abbiamo considerata, permetterebbe, inoltre, di determinare la resistenza sconosciuta del sistema. Detti L_1 ed L_2 questi valori si avrebbe

$$\frac{4 L_1^2 C}{4 L_1 - R^2 C} = \frac{4 L_2^2 C}{4 L_2 - R^2 C}$$

dalla quale si trae:

$$R = 2 \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C (L_1 + L_2)}}$$

Per tale determinazione si potrebbero scegliere due valori di L, abbastanza prossimi a quello corrispondente al minimo di T, e quindi poco differenti fra loro, per potere ritenere che, data la costanza del periodo, le condizioni della scarica, nei due casi, non siano notevolmente differenti.

Per la coppia particolare $L_1 = L_2$, corrispondente al minimo di T avremmo:

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

Tali determinazioni, specialmente vantaggiose nel caso dei sistemi elettrici [1]) comprendenti scintille, sarebbero importanti a causa delle difficoltà che s' incontrano, nella misura della resistenza di un circuito, per le correnti rapidamente oscillanti.

Se invece scegliamo per la nostra rappresentazione assi ortogonali, l'equazione dell' iperbole, riferita ai suoi assi di simmetria, diventa:

$$-\frac{X^2}{\frac{R^4 C^3}{8(C+\sqrt{1+C^2})}} + \frac{Y^2}{\frac{R^4 C^3}{8(\sqrt{1+C^2}-C)}} = 1 .$$

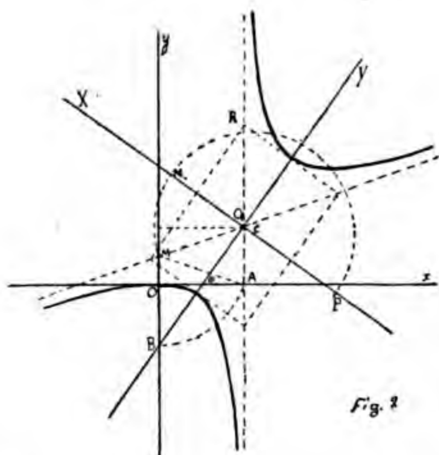
Dalle equazioni (3) degli assi, semplificate per la condizione $\omega = 90^0$ dalla (1') e dalla equazione precedente si deduce che, il primo asse di simmetria dovrà passare per il punto B (vedi fig. 2ª), in cui l'asse Oy viene tagliato dalla circonferenza, che ha il centro nel punto M di coordinate $(0, y_0/2)$, e per raggio MO_1, che uno degli assintoti è la retta O_1A parallela ad Oy; e che la distanza focale (data dalla radice dell' espressione:

$$\frac{1}{4} R^2 C \sqrt{1+C^2} \cdot R^2 C^2 = \frac{1}{4} R^2 C \sec\theta \cdot R^2 C^2 , \text{ [2])}$$

1) S'intende che a questi sistemi debba essere applicabile la formola (1). Le belle esperienze dei proff. A. Battelli e L. Magri (Mem. Reale Acc. delle Scienze di Torino, ser. 2, t. 51. 1902) mostrano che essa è generalmente applicabile.

2) Con θ abbiamo denotato l'angolo OAM.

cioè, data dal lato del quadrato equivalente al rettangolo $\overline{MO_1} \cdot 2\,\overline{AO_1}$) è in figura rappresentata dal segmento compreso



tra O_1 ed il punto di intersezione della circonferenza costruita su M_1P come diametro con l'asse O_1Y giacchè si è preso $O_1M_1 = O_1M$ ed $\overline{O_1P} = 2\,\overline{O_1A}$.

Si può, con ciò, costruire facilmente la curva e ritrovare nella nuova figura le proprietà precedentemente esposte.

Con un procedimento analogo, possiamo ottenere la rappresentazione grafica della relazione fra il periodo e la capacità. In questo caso ponendo $C = x$ e $\frac{T^2}{4\pi^2} = y$, avremo dalla (1):

$$R^2 x y + 4 L^2 x - 4 L y = 0$$

la quale rappresenta un'iperbole, di cui le coordinate del centro sono:

(5) $$x_0 = \frac{4L}{R^2} \qquad - y_0 = - \frac{4L^2}{R^2}$$

e le equazioni degli assi

$$(6)\qquad \begin{cases} x - y - \dfrac{4\,L}{R^2}(L+1) = 0 \\[2ex] x + y + \dfrac{4\,L}{R^2}(L-1) = 0 \,. \end{cases}$$

L'equazione dell'iperbole, riferita a questi assi, diventa:

$$-\frac{X^2}{64\,\dfrac{L^3}{R^4}\cos^2\dfrac{\omega}{2}} + \frac{Y^2}{64\,\dfrac{L^3}{R^4}\,\mathrm{sen}^2\,\dfrac{\omega}{2}} = 1$$

dalla quale si deduce, che il quadrato della distanza focale è (tenuto conto delle (5)):

$$(7)\qquad 64\,\frac{L^3}{R^4} = 4\,x_0\,y_0 \,.$$

In particolare, se scegliamo gli assi Ox, Oy ortogonali, l'iperbole risulta equilatera.

Dalle formole (6) si vede, che il primo asse di simmetria dovrà tagliare i due assi coordinati ortogonali in due punti A e B (fig. 3ª) per i quali, indipendentemente dal segno, si ha:

$$OA = OB = x_0 + y_0$$

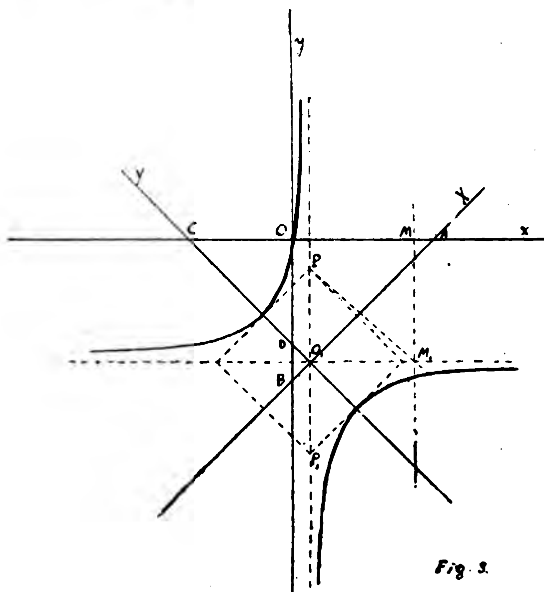


Fig. 3.

e l'altro asse dovrà tagliare gli assi coordinati nei punti C e D, per i quali si ha:

$$OC = OD = y_0 - x_0 .$$

Nella figura, segnate due rette Ox, Oy ortogonali, ed il punto O_1, che ha le coordinate date dalle (5), si potranno facilmente costruire i due assi di simmetria O_1X, O_1Y; essi risulteranno evidentemente paralleli alle bisettrici della coppia Ox, Oy; gli assintoti dell'iperbole $O_1 P$, $O_1 M_1$ saranno perciò, rispettivamente paralleli agli assi coordinati originari.

Per potere completare la rappresentazione, basterà determinare in figura, la distanza focale.

In virtù della (7), il suo quadrato è uguale a $4 x_0 y_0$, e siccome possiamo scrivere:

$$4 x_0 y_0 = (y_0 + x_0)^2 - (y_0 - x_0)^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2$$

concludiamo, che la distanza focale è il terzo lato, di un triangolo rettangolo, che ha l'ipotenusa uguale ad OB, ed un cateto uguale ad OC.

In figura, se il punto M ha per ascissa y_0, $O_1 M_1$ sarà uguale ad OC, e basterà descrivere con centro in M_1 e raggio uguale ad OB, una circonferenza per ottenere sulla retta O_1P, i due punti P, P_1 estremi della diagonale del quadrato costruito sugli assi della curva. Il segmento O_1P sarà la distanza focale cercata. L'iperbole è con ciò determinata, essa dovrà evidentemente passare per O.

Siccome nel caso fisico la x è sempre positiva, la rappresentazione cercata risulta dal ramo dell'iperbole compreso nell'angolo $P_1O_1M_1$, e dall'arco infinito dell'altro ramo, compreso nell'angolo AOy e contato a partire da O.

Si vede dalla figura che per x (cioè C) crescente a partire da zero, la y è positiva e rapidamente crescente; per $x = x_0$, la y diventa infinita, e negativa per tutti i valori successivi di x. In altri termini la nostra rappresentazione grafica mostra che se la capacità C di un circuito elettrico, con resistenza ed induttanza costanti, si fa variare da zero ad infinito, il circuito possiede periodo proprio d'oscillazione fino a

che è $C < \frac{4L}{R^2}$; questo periodo cresce sempre da zero ad infinito, quando C passa da zero al valore limite $\frac{4L}{R^2}$.

Volendo, infine, ottenere una rappresentazione analoga nel caso che si consideri variabile la sola R, conviene porre nella (1)

$$x = R \text{ e } y = \frac{2\pi}{T}.$$

Allora si ottiene subito l'equazione:

$$\frac{x^2}{\frac{4L}{C}} + \frac{y^2}{\frac{1}{LC}} = 1. \tag{8}$$

Scegliendo gli assi di riferimento ortogonali, questi saranno gli assi di simmetria dell'ellisse rappresentata dalla (8), e le lunghezze dei semiassi saranno:

$$a = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

La rappresentazione cercata risulta soltanto dall'arco ACB (fig. 4ª) dell'ellisse, riferita ai suoi assi. Si rileva dalla figura,

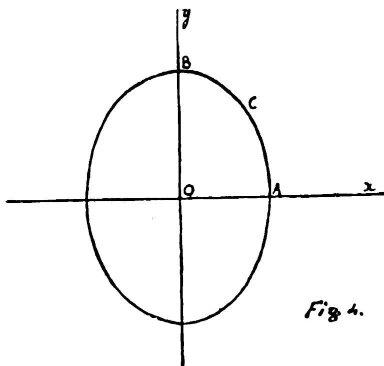


Fig. 4.

che quando la resistenza varia da zero fino al valore $2\sqrt{\frac{L}{C}}$, il periodo è sempre reale e cresce dal valore $2\pi\sqrt{LC}$ fino ad

infinito; per resistenze superiori a $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ non si ha più periodo reale.

Volendo applicare le costruzioni precedenti, ai casi che più frequentemente nella pratica si possono presentare, s'incontra un inconveniente.

Scegliendo come unità di misura le elettromagnetiche assolute, risultano in generale troppo grandi i numeri che esprimono le L e le R, e troppo piccoli quelli che esprimono le C. Nè si prestano meglio le unità pratiche, nelle quali le L e le C vengono espresse da numeri troppo piccoli. Non è perciò praticamente possibile, costruire graficamente le diverse grandezze, che corrispondono a questi numeri.

È necessario, perciò, adottare, a seconda dei casi dei multipli o dei sottomultipli convenienti delle diverse unità. Così, quando si hanno delle oscillazioni lente, analoghe a quelle che si producono con l'arco cantante, converrà scegliere, p. es., come unità di misure, per le induttanze il microhenry, per le resistenze l'ohm, e per le capacità il microfarad.

Così facendo, nell'espressione

$$y = \frac{4\,L^2\,C}{4\,L - R^2\,C}$$

calcolata in unità pratiche, i numeri che esprimono L e C vengono moltiplicati per 10^6. Essa perciò diventa:

$$\frac{4\,L^2\,C}{4\,L - R^2\,C} \cdot 10^{12}$$

cioè risulta misurata dal numero di prima moltiplicato per 10^{12}. Quindi se noi ci costruiamo il diagramma dell'espressione precedente, in funzione di L o di C, quando misuriamo le diverse grandezze con le unità precedentemente convenute, i valori di y, forniti dalla rappresentazione, sono tutti moltiplicati per 10^{12}, mentre quelli di L o di C sono moltiplicati per 10^6. In altri termini la figura ottenuta è stirata nel senso dell'asse Oy nel rapporto di 10^6 a 1.

Quando si tratti di sistemi oscillanti con periodi più piccoli (del genere di quelli adoperati nella telegrafia senza fili) con-

verrà scegliere p. es. come unità di misure per le induttanze il centimetro, per le resistenze l'ohm, e per le capacità l'unità pratica moltiplicata per 10^{-9}. In tal caso avremo una figura stirata nel senso dell'asse Oy nel rapporto di 10^9 a 1.

Analogamente si potrà procedere, quando si considera come variabile la R.

In questo caso abbiamo posto:

$$y^2 = \frac{4\,L - R^2\,C}{4\,L^2\,C}$$ [1]).

Se si sceglie, o il primo gruppo di unità precedentemente adottato, ovvero il secondo, questa relazione risulta moltiplicata, o per il fattore numerico 10^{-12}, ovvero per 10^{-18}; mentre la R rimane sempre espressa dallo stesso numero.

Quindi la rappresentazione grafica che si ottiene, prendendo le unità dette, risulta impiccolita nel senso dell'asse y, o nel rapporto 10^6 a 1, ovvero nel rapporto 10^9 a 1.

Istituto Fisico della R. Università
Palermo 20 marzo 1907.

---

1) Per piccoli valori di R, si suole praticamente assumere y uguale a b. Volendo ritenere $y = b$ finchè è $y \geq \frac{n-1}{n} b$ (per n dato) si vede, che il limite superiore dei valori di R, che non influiscono su y, è sempre una determinata frazione di a (indipendente dallo schiacciamento dell'ellisse). Infatti per $y = \frac{n-1}{n} b$, abbiamo $x = \frac{a}{n}\sqrt{2n-1}$. Così p. es. se poniamo $n = 100$, si ha $x = 0{,}141\ a$; ossia la resistenza massima trascurabile, per la nostra approssimazione, è $0{,}28 . \sqrt{\frac{L}{C}}$.

SULLA RAPPRESENTAZIONE DEI FENOMENI ELASTICI.

G. ERCOLINI.

1. — Allorchè nelle ricerche delle proprietà elastiche d'un corpo si ha cura di fissare esattamente la legge secondo la quale le forze vengon fatte agire, i risultati che si ottengono sono di una straordinaria complicazione, ma anche di una grande importanza; le teorie della elasticità, non tenendo conto della velocità con cui si operano le deformazioni, che su queste influisce molto e in modo vario, restano profondamente scosse [1]).

Se si tratta di deformazioni infinitamente piccole, o almeno sufficientemente piccole, la teoria classica dell'elasticità perfetta sembra in accordo coi fatti, se non altro nel caso di deformazioni le più semplici.

Ma in pratica si ha per forza a che fare con deformazioni più o meno grandi, ed allora la rilevante complicazione dei fenomeni che si riscontrano, non spiegabili con nessuna teoria, è dovuta al fatto che in ogni deformazione si sovrappongono sempre tre ordini di fenomeni:

deformazioni permanenti propriamente dette che provocano alterazioni nella materia;

effetti d'isteresi che generano fenomeni abbastanza rapidi;

effetti di elasticità susseguente che si producono in fenomeni lenti.

Si è cercato di spiegare i fatti ammettendo la materia costituita da molecole e da materia vischiosa [2]).

1) In un bel libro del Bouasse: " Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes, Paris 1905 „ è esposto chiaramente lo stato attuale della questione, ed è mostrato quale e quanto grande è il cammino ancora da fare nel campo della elasticità.

2) Brillouin. Ann. d. Ch. et d. Phys. 1898. Bouasse, l. c.

L'idea di questa dualità della materia è, in sostanza, dovuta al Coulomb, che distingueva in un metallo le proprietà di elasticità attribuibili a particelle integranti e che sarebbero stabili, funzioni determinate di diversi parametri (temperatura, magnetismo,...) e indipendenti dai loro valori attuali e anteriori, e quelle di coerenza proprie di un cemento che serve di legame a queste particelle e che non sono funzioni determinate di parametri.

Ma sia che si suppongano le molecole o particelle integranti disseminate nella materia vischiosa, o questa contenuta in ogni molecola, sorge una grave difficoltà che l'ipotesi del Coulomb non prevede. L'esperienza prova, nel modo più certo, che in una deformazione la materia si altera e variano le sue costanti elastiche; nè i cambiamenti di densità, essendo troppo piccoli, spiegano tutti i fenomeni.

Le ipotesi fatte risentono di questa difficoltà e non riescono a dar completa ragione delle modificazioni elastiche più o meno profonde provocate dalle deformazioni.

Allo scopo di trovare una rappresentazione possibilmente completa degli intricati fenomeni di deformazione, ho imaginato un modello di molecola elastica nel quale la materia vischiosa si trova entro la molecola stessa [1]).

Alle forze che la deformano si oppongono reazioni interne di due specie: una agisce senza, l'altra, a causa del liquido vischioso, con ritardo, variabile a seconda dell'intensità delle forze, chè se queste assumono un valore relativamente elevato, il ritardo diminuisce d'assai.

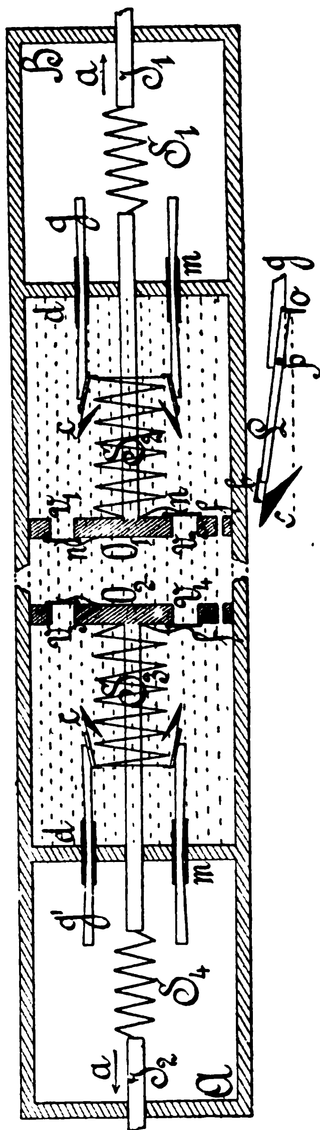
Sia per piccole che per grandi deformazioni le reazioni interne impongono loro un limite, variabile con la intensità delle forze che agiscono; nel primo caso al cessare di queste l'energia interna residua riporta la molecola alle condizioni iniziali, in un tempo più o meno lungo, nel secondo ciò non è possibile e la molecola resta deformata permanentemente, anche quando l'energia interna si è annullata.

1) In ciò è simile al modello del Bouasse (l. c.) che però, non consentendo deformazioni permanenti, non permette di spiegare una quantità di fenomeni; e l'A. avverte che ciò non potrà avvenire senza apportarvi profonde modificazioni.

Allorchè la forza che agisce diventa costante, la reazione, che ritarda sul valore di essa, permette una deformazione susseguente; quando invece si produce un arresto di deformazione, varia la configurazione interna, accostandosi con diversa lentezza ad uno stato finale di equilibrio.

In tal modo sono possibili e riescono variamente fra loro concatenati, i tre ordini di fenomeni che sopra ho accennato.

2. — *Modello schematico della molecola elastica.* — Un cilindro AB (fig. 1) è diviso in tre scompartimenti da due dischi *d*; gli estremi sono vuoti, quello di mezzo invece è riempito d'un liquido a grande viscosità, entro il quale si trovano due stantuffi O_1, O_2 di cui l'asse attraversa i *d* e porta all'estremo una spirale cilindrica S_1, S_4 che fa capo ad un cilindro I_1, I_2 scorrevole entro un foro della parete esterna.


Fig. 1.

In O_1, O_2 sono praticati: un foro capillare *f* e due altri più grandi chiudibili con valvole, delle quali una, v_1, v_2, si apre dall'esterno all'interno, l'altra v_2, v_4 in senso opposto; esse sono premute contro O_1, O_2 dalle molle *n*.

Attraverso i *d* possono scorrere dei pezzi di acciaio *g*, *g'* costituiti ciascuno da due tronchi di cono riuniti per le basi più piccole: sono tre per parte, collegati fra loro da due a-

nelli estremi (non rappresentati nella figura) opportunamente situati. Le loro estremità verso O_1, O_2 portano ciascuna un pernio p intorno a cui gira una leva rigida L, che da una parte finisce prolungata con una corta lamina metallica flessibile e resistente, che sorregge una specie di cuneo c a testa inclinata, e dall'altra ha una ripiegatura o ad orlo tagliente. Fra i c e gli o si trova l'estremità d'una spirale cilindrica S_2, S_3 fissata per l'altro capo ad O_1, O_2.

Tutto è disposto in modo, e le dimensioni delle varie parti sono tali, che quando O_1 e O_2 si accostano ai d, le S_2 e S_3, agendo sopra i c, inclinano le L, sì che le sporgenze o arrestano le loro estremità, che vi aderiscono impedendo alle L di ruotare, senza che i c siano di sensibile ostacolo all'avvicinamento delle spire. Quando invece O_1, O_2 retrocedono, i c arrestano la spira delle molle più prossima, e per la loro inclinazione, trattenuti dal battente b, le L sono obbligate a ruotare in senso inverso al precedente, e le spire fra c ed o si distendono liberamente.

I fori per cui passano i g e g' sono prolungati con due semicilindri di acciaio m mantenuti contro i pezzi conici da opportuni tiranti a spirale (non rappresentati), sì che l'attrito di scorrimento, in qualunque senso avvenga il moto, cresca con uniformità; mentre O_1, O_2, I_1, I_2 si posson muovere senza attrito sensibile contro le pareti che toccano.

Prenderome per condizione iniziale del modello quella in cui, come nella figura, le S_2 e S_3 poggiano sugli o.

3. — *Trazione*. — Applichiamo ad I_1 e I_2 una forza nel senso a: se le deformazioni sono infinitamente piccole, esse risultano perfettamente elastiche. Ma se non sono tali, i fenomeni che si producono risultano complessi: dell'energia si assorbe e la legge di variazione della forza influisce.

Supponiamo che questa cresca proporzionalmente al tempo, $F = ht$; la sua intensità si mantenga sempre inferiore ad un certo valore, in modo che le spire di S_2, S_3 non vengano mai a passare sotto i coni c. La deformazione, misurata dallo spostamento di I_1 e I_2, è perfettamente elastica, ma *ritardata*.

Trascurando le masse, per la simmetria del modello si può limitare il ragionamento alla sua parte di destra.

Sotto l'azione di F, S_1 si distende, ma O_1 non le obbedisce subito, e lo spostamento di I_1 è in ogni istante in ritardo sul valore di F: vi ha *isteresi*.

Per calcolare l'allungamento l totale al tempo t, poichè esso consta di quello $l_1 = \frac{F}{S_1}$ dovuto a S_1, se S_1 è la costante di questa molla, e dello spostamento l_2 di O_1, occorre determinare l_2.

Si può ritenere che al variare di F la pressione in O_1 cresca uniformemente e allora il suo valor medio sarà

$$\frac{F - S_2 l_2}{\pi R^2 t}$$

ove $S_2 l_2$ è la forza necessaria ad accorciare di l_2 la S_2, e R il raggio di O_1. Poichè si parte da una pressione nulla, ad un tempo qualunque θ la pressione che produce l'efflusso è

$$\frac{F - S_2 l_2}{\pi R^2 t} \theta .$$

Il volume dv di liquido che attraversa f nel tempo $d\theta$ successivo a θ è

$$dv = K\left(\frac{F - S_2 l_2}{\pi R^2 t} \theta\right) d\theta$$

essendo $K = \frac{\pi r^4}{8 \eta z}$ se r è il raggio di f, z la sua lunghezza e η il coefficiente d'attrito del liquido.

Il volume totale del liquido passato alla fine di t sarà:

$$\pi R^2 l_2 = K \int_0^t \left(\frac{F - S_2 l_2}{\pi R^2 t} \theta\right) d\theta = K \frac{F - S_2 l_2}{2 \pi R^2} t$$

e quindi

$$l_2 = \frac{KF}{a} t$$

se $a = 2 \pi^2 R^4 + K S_2 t$. Perciò

$$(1) \qquad l = \frac{F}{S_1} + \frac{KF}{a} t$$

L'allungamento dipende non soltanto dall' intensità della forza deformante, ma anche dalla durata della sua azione.

a. — Alla fine di t manteniamo costante la F; la deformazione seguita per un tempo t_1: è una deformazione *susseguente.* t_1 si calcola ammettendo che la pressione iniziale $\frac{F - S_2 l_2}{\pi R^2} = A$ su O_1 decresca uniformemente, e perciò, con ragionamento simile al precedente, si trova

$$\pi l_0 R^2 = K \frac{A}{2} t_1$$

se l_0 è l'allungamento susseguente che si produce; quindi

$$t_1 = \frac{2\pi^2 R^4 l_0}{K(F - S_2 l_2)} .$$

Ma la pressione si annulla quando

(2) $$F - (S_2 l_2 - S_2 l_0) = 0$$

e allora

$$t_1 = \frac{2\pi^2 R^4}{K S_2} ,$$

dipendente solo da S_2 e dalle dimensioni della molecola.

Dalle (1) e (2) si deduce come allungamento totale

$$l_{t_1} = F\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)$$

precisamente, ed è naturale, come se il liquido vischioso non esistesse.

b. — Se invece al tempo t si annulla rapidamente la F, allora $l_1 = 0$ e la molecola ritorna alle condizioni primitive in un tempo t_2 calcolabile nel solito modo; si trova

$$t_2 = \frac{2\pi^2 R^4}{K S_2}$$

Così pure se si fa $F = 0$ alla fine di $t + t_1$, il tempo necessario a ritornare alla posizione di partenza diviene $\frac{2\pi^2 R^4}{K S_2}$.

Cioè la molecola impiegherebbe lo stesso tempo tanto a ritor-

nare alle condizioni primitive al cessare della forza, quanto a giungere alla massima deformazione sotto un valor costante di essa, qualunque siano, nelle condizioni imposte, gli allungamenti subiti.

c. — Se al tempo t si diminuisce la F proporzionalmente al tempo, vi è di nuovo isteresi che produce *assorbimento* di energia, e nel piano trazione (ordinate) — allungamento si percorre un cammino *al di sotto* del primo.

Per conoscere l'accorciamento della molecola al tempo $t = 0$ basta determinare quello λ_1 dovuto al moto di O_1, su cui agisce una pressione media $\frac{S_1 \lambda_1}{t \pi R^2}$; perciò si trova

$$\lambda_1 = \frac{2 K S_1 l_1}{a} t < l_1 .$$

Se torniamo a far crescere F, bisogna distinguere due fasi nel moto di O_1:

Poichè a $t = 0$ la S_2 non è giunta alla sua lunghezza di riposo, essa seguita a distendersi, nonostante F cominci ad agire, e O_1 continua a muoversi nel senso precedente, percorrendo, in un certo tempo τ, durante il quale è soggetto alla pressione media $\frac{S_2 (l_2 - \lambda_1)}{\pi R^2 \tau}$, il tratto

$$\lambda_2 = \frac{K S_2 (l_2 - \lambda_1) \tau}{b}$$

con $b = 2 \pi^2 R^4$; sì che il suo cammino totale è $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3$.

Alla fine di τ, quando la forza ha il valore F_1, O_1 ritorna indietro e sotto l'azione di $F - F_1 = F_2$, in un tempo $t - \tau$, in cui la pressione media è $\frac{F_2 - S_2 \lambda_4}{\pi R^2 (t - \tau)}$, percorre un tratto

$$\lambda_4 = \frac{K F_2}{c} (t - \tau)$$

con $c = 2 \pi^2 R^4 + K S_2 (t - \tau)$. Ora si ha:

$$l_2 - \lambda_3 = l_2 \left\{ 1 - \frac{K S_2 (2 b t - a \tau)}{a b} \right\} + \frac{2 K^2 S_2 l_2 t \tau}{a b} .$$

Essendo $\frac{2bt - a\tau}{ab} < 1$ risulta $l_2 > \lambda_2$; ma anche $\lambda_1 < l_2$.

L'allungamento è maggiore nella prima deformazione che nella seconda; in entrambe è maggiore del primo accorciamento.

Ripetendo il ragionamento per le successive inversioni di F, si troverebbe che le deformazioni in un senso, come quelle in senso opposto, vanno continuamente, ma sempre meno, diminuendo: si ha *accomodamento*. In pratica dopo poche operazioni il ciclo *si chiude* e l'area da esso compresa, come la sua inclinazione media dipendono dai valori di F e t.

4. — Supponiamo che la F cresca d'intensità fino a portare S_2 in contatto coi c in un tempo $t_0 < t$ quando ha il valore $F_0 < F$, ma non possa mai esser vinto l'attrito dei g.

a. — Per un certo valore di F al tempo $t_1 > t_0$ e $< t$ l'elasticità della molla n è vinta, la valvola v_1 si apre ed O_1 obbedisce più liberamente alla forza. L'allungamento totale l consta di tre parti:

l' da zero a t_0 — Detto l'_2 l'accorciamento di S_2 a t_0 e l'_1 l'allungamento di S_1 può scriversi

$$l' = l'_1 + l'_2 = \frac{F_0}{S_1} + \varphi_1(F_0, t_0)$$

essendo $\varphi_1(F_0, t_0)$ una certa funzione di F_0 e t_0.

l'' in $t'' = t_1 - t_0$ — Se alla fine di t'' la forza ha il valore F_1 e S_2 s'è accorciata di l''_2, si avrà

$$l'' = l''_1 + l''_2 = \frac{F_1 - F_0}{S_1} + \varphi_2(F_0, F_1, t_1) .$$

l''' in $t''' = t - t_1$. Al principio la v_1 si apre ed O_1 segue la trazione con un ritardo minore del precedente; si ha

$$l''' = l'''_1 + l'''_2 = \frac{F - F_1}{S_1} + \varphi_3(F_1, F_1 t''') .$$

L'allungamento totale $l = l' + l'' + l'''$ dipende ancora dal valore di F e dalla velocità della sua variazione.

b. — Al tempo t imponiamo la diminuzione della forza, sempre proporzionalmente al tempo. L'accorciamento di S_1 alla

fine è $l'_1 + l''_1 + l'''_1 = \lambda_1$, quello di S_2 è φ_4 (F, t), e quello totale della molecola

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \varphi_4 (F, t).$$

È minore di l, perchè le spire della S_2 entrate sotto i c vi rimangono; si ha *deformazione residua* che dipende dall'allungamento subito in precedenza e dal modo com'è stato ottenuto. È solo in parte temporanea, chè dopo un tempo $t_0 = \frac{2\pi^2 R^4}{KS'_2}$, se S'_2 è la nuova costante di S_2, essa diminuisce dell'accorciamento susseguente $l'_0 - l_0$ dovuto al passaggio di S_2 dalla lunghezza l'_0, che aveva all'annullarsi della forza, a quello l_0 di riposo. La *deformazione permanente* è $l_p = l - \lambda_2 - l'_0 + l_0$; variabile colla natura del procedimento che l'ha generata, essa non può mai esser nulla.

Se poi il moto retrogrado di I_1 è abbastanza rapido, può anche darsi che la pressione esercitata da S_2 permetta l'apertura della valvola v_2; in tal caso resulta più piccola la deformazione residua.

Col ripetersi delle operazioni di trazione e rilasciamento, i cicli finiscono per chiudersi ed assumere una forma limite ad inclinazione media ed area variabili con F e t.

5. — Supponiamo finalmente che l'intensità della F giunga a vincere l'attrito dei g quando assume il valore $F' < F$. Da zero a F' l'allungamento è l (§ 4 — a); da F' a F i g scorrono di l_g, v_1 si apre di più, O_1 scorre di un tratto e I_1 si sposta ulteriormente di l_2; al tempo t l'allungamento totale è divenuto

$$l_t = l + l_g + l_2.$$

Se alla fine di t la F decresce, l'accorciamento comincia a rendersi sensibile dopo un certo tempo, quando si è chiusa la v_1. E allora al tempo $t = 0$, o la S_2 è giunta alla sua lunghezza naturale e a carica nulla non si ha nessun fenomeno susseguente, o essa non ha ancora questa lunghezza e a carica nulla si produce un accorciamento susseguente.

Ripetendo le operazioni i cicli finiscono per chiudersi, lungi però dalla curva di prima deformazione, ed hanno area e inclinazione media variabile con F, t e l_g.

È da osservare che in tutti i casi fin qui esaminati, per la legge di variazione imposta ad F, le diverse fasi di deformazione si succedono con continuità, sì che le curve rappresentative non possono in generale avere che dei tratti a raggio di curvatura al più molto, ma non infinitamente piccolo.

6. — Queste proprietà del modello permettono facilmente di spiegare molti fenomeni scoperti dall' esperienza. La forma della curva di trazione e la sua dipendenza dalla durata di deformazione, i vari effetti dell' allungamento sotto carica costante, l' influenza di arresti nei vari punti, ecc. sono di agevole interpretazione.

Come esempio esaminerò i fenomeni di deformazione susseguente a carica costante.

L' esperienza ha mostrato che se in un punto della curva di trazione si arresta la carica e si mantiene costante, l'allungamento susseguente, in un dato tempo, è maggiore più il punto di arresto si sposta verso destra (càriche crescenti) sulla curva.

Esaminiamo il modello allorchè i g si spostano e quindi la v_1 è aperta. Al momento dell'arresto sia l_2 la lunghezza di S_2 e la v_1 si chiuda quando, in un tempo t, la l_2 è diventata l'_2. L' allungamento susseguente rapido è $l_2 - l'_2$ e perciò, poichè la pressione media che durante il tempo t sollecita O_1 è $\frac{S_2(l'_2 - l_2)}{\pi R^2 t}$, con ragionamento simile a quello fatto in principio si trova

$$l_2 - l'_2 = \frac{2 H t (F - S_2 l_2)}{b}$$

con $b = 2\pi^2 R^4 - H t S_2$ e H è il valore più grande che assume K quando l'efflusso avviene quasi esclusivamente dalla v_1. $l_2 - l'_2$ è maggiore più grande è F, cioè più ci si sposta verso destra sulla curva di trazione.

7. — Supponiamo ora che la forza F cresca molto lentamente: ad un certo valore di essa i g si spostano, ma poi l'attrito crescente in m li ferma, ed essi non ritornano a scorrere se non quando la forza raggiunge un valore più elevato. La curva di trazione deve quindi presentare delle ondulazioni più

o meno pronunziate a seconda della minore o maggiore velocità di variazione della F.

L'esperienza ha riscontrato questa curva solo in alcune specie di ferro. Ciò indica che pel rame, argento, platino,.... bisogna supporre che i g abbiano sezione debolmente variabile o l'attrito in m sia poco elevato: ma si comprende che, per una variazione lentissima di F, anche con questi metalli deve trovarsi una curva di trazione ondulata.

E si capisce pure che i noti ritardi della deformazione sulla carica [1]) debbono riuscire ben diversi a seconda del modo di variare della F, chè se questa cambiasse molto lentamente, essi risulterebbero piccolissimi e potrebbero anche annullarsi.

8. — *Torsione.* — Lo spostamento di I_1 e I_2 nel senso a corrisponde ad una torsione; ma riportati I_1 e I_2 alla posizione di partenza, questa può sorpassarsi e la deformazione crescer tanto che i g e g' si spostano avvicinandosi fra di loro; le valvole v_2 e v_4 sono allora aperte.

Se la torsione α cresce in valore proporzionalmente al tempo ($\alpha = k\ t$), pei cicli unilaterali valgono, in generale, le considerazioni svolte pei singoli casi nella trazione, ove all'allungamento e alla carica si sostituiscano la coppia C ed α.

Così la formula (1) si trasforma in

$$C = C' + \frac{K\alpha}{a} t$$

con $C' = S_1 l'$, essendo l' l'allungamento di S_1 al tempo t; le altre formule subiscono trasformazioni simili.

In ogni caso, allorchè da un certo valor positivo di C si torna a $C = 0$, la α è sempre positiva in virtù dell'isteresi e non passa ad esser nulla che per $-C$ assai grande, tanto più maggiore in principio è stato α. Lo stesso succede nei cicli bilaterali quando da $-\alpha$ si giunge ad $\alpha = 0$: il valore di C a questo punto è positivo.

Con ragionamenti simili a quelli fatti nella trazione si giungerebbe facilmente a vedere che i valori di C dipendono da α e da t per la prima torsione; per le successive dipendono anche da tutti i valori precedenti di C e α.

1) Nuovo Cimento, marzo 1906.

Nel piano coppia (ordinate)-torsione i cicli finiscono per fissarsi col ripetersi delle operazioni fra valori costanti e racchiudono aree variabili, come la loro inclinazione, con α e t.

9. Esaminiamo i fenomeni susseguentí che si verificano allorchè α è mantenuta bruscamente costante.

L'esperienza prova che la coppia varia da prima con rapidità, poi sempre più con lentezza. Dopo una perdita rapida, di durata molto incerta, i risultati sperimentali sono approssimativamente rappresentati dalla formula

$$p = A \log (T + \tau) - B \tag{3}$$

essendo A e B due costanti, $A > B$, crescenti con la torsione, che debbono calcolarsi trascurando i primi istanti di perdita; T è il tempo contato dopo l'arresto e τ è variabile, con incertezza, da 20^s a 30^s coll'aumentare della torsione.

Poichè la perdita in principio è sempre più rapida di quello che indichi la (3), fondandosi sui fatti si distingue una perdita *rapida* che avviene nei primi secondi e una *lenta* che sussegue; e si trova che la prima dipende dalla velocità di torsione al momento dell'arresto, crescendo con questa, l'altra dalla velocità anteriore all'arresto.

Se I_1 è mantenuto in posizione costante, la tensione di S_1 diminuisce anche se i g erano in moto, poichè questo è in ritardo sul valore della forza; ed avremo perciò una perdita rapida nel tempo che passa fra l'arresto e la chiusura di v_1. Se l_1 e l_2 sono le lunghezze di S_1 e S_2 all'arresto e l'_1, l'_2 i loro valori quando v_1 si chiude, la perdita di coppia si trova essere:

$$S_1 (l_1 - l'_1) = a' - \frac{b'}{H t}$$

con $a' = S_2 (l_2 + l'_2) + 2 S_1 l_1$ e $b' = 2 \pi^2 R^4 (l_2 - l'_2)$.

Dipende dalla velocità di torsione all'arresto, cioè dalla velocità con cui si muovono i g.

Al chiudersi di v_1 succede una perdita lenta di coppia data da:

$$S_1 (l_1 - l'_1) = a' - \frac{b'}{K T}$$

se l_1, l'_1 e l_2, l'_2 rappresentano ora le lunghezze di S_1 e S_2 all'atto della chiusura di v_1 e alla fine del tempo, più o meno lungo, che richiedono per giungere alla loro posizione di riposo. E si ha:

$$\frac{d\{S_1(l_1 - l'_1)\}}{dT} = \frac{b'}{KT^2} \tag{4}$$

mentre la (3) dà

$$\frac{dp}{dT} = \frac{A}{T + \tau} \,. \tag{5}$$

Tutte le incertezze intorno ai valori di A e τ nella (3) possono spiegare la diversità fra le (4) e (5) che, data la piccolezza di K, non è poi grande. Del resto la (3) non rappresenta neppure i fenomeni che si producono quando T è assai grande, e d'altra parte in tutti i fenomeni lenti non possono, a rigore, considerarsi trascurabili le variazioni termiche che le rilevanti deformazioni subite in precedenza dai fili debbono produrre.

Il modello consente di prevedere quanto i fenomeni di perdita di coppia ad azimut costante sarebbero diversi col ripetersi delle torsioni e detorsioni, o col produrre più arresti intermedi prima d'arrivare ad una data torsione.

10. — Supponiamo ora che, dopo avere spostato I_1 nel senso *a*, si faccia retrocedere con tale velocità che la S_2 sia in ritardo sul rilasciamento della S_1; se si arresta allora I_1, O_1 obbedisce a S_2 e la tensione di S_1, cioè la C, cresce. Ma se si arresta quando O_1, a causa del suo moto nel senso *a*, si avvicina a *d*, la tensione di S_1 diminuisce.

L'esperienza mostra questi fenomeni, ma il modello indica alcuni casi non ancora esaminati. Se infatti I_1 retrocede con tale lentezza che S_2 non sia in ritardo su S_1, all'arresto non si ha variazione di coppia, e succede invece un piccolo aumento se la velocità di I_1 è grande, in modo che v_2 si apra sì da principio. Deve perciò esistere una velocità di detorsione per la quale questi fenomeni di aumento di coppia all'arresto sono più cospicui; e diversi riusciranno se quella velocità non è costante, se è per esempio sinusoidale.

Si comprende poi quale dev'essere l'influenza d'un arresto alla fine della torsione; e così pure la forma della curva di prima e seconda torsione, quella al principio d'una ritorsione dopo un arresto, e i numerosi e vari fenomeni sussеguenti a coppia nulla non sono di difficile interpretazione, e se ne possono prevedere dei nuovi più o meno complicati.

11. — *Trazione e torsione.* — Il legame fra le due deformazioni è tanto grande, le loro relazioni sono sì variabilmente intime, che i fenomeni, di una straordinaria complicazione, non trovano neppure in parte una qualche spiegazione nelle attuali teorie della elasticità, e può ben dirsi che metteranno a dura prova qualunque altra che possa in avvenire immaginarsi e della quale costituiranno come la pietra di paragone.

Senza un'ulteriore modificazione, anche il modello fin qui esaminato sarebbe ora insufficiente: occorre aggiungere fra i due stantuffi O_1, O_2 un'altra parte, che però non modifica per nulla le deformazioni e i fenomeni precedentemente studiati.

Mediante l'asta G (fig. 2) O_1 è collegato ad una losanga articolata $o\,p\,q\,r$ di cui i vertici o, q sono opportunamente guidati entro una fenditura parallela ad O_1, fissa alle pareti di A B. Dal vertice r parte una spirale β_1 che dista da O_1 di un certo tratto. Da O_2 parte una seconda spirale β_2 di fronte alla quale, ad una certa distanza, si trova il prolungamento s di

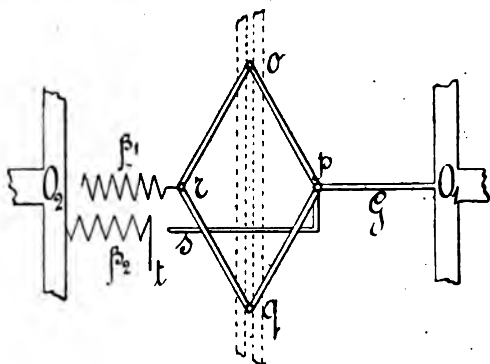


Fig. 2.

G; essa termina con un disco in cui è praticata una fenditura diametrale, di lunghezza minore del raggio.

Le cose debbono esser disposte in modo che se O_2 è fermo e si muove O_1, *s* comprime β_2: ciò invece non deve succedere se si muovono contemporaneamente O_1 e O_2. A tal fine si può, per es., al disco di β_2 saldarne un secondo laterale *t*: allora nel primo caso *s* viene a battere contro β_2, che è così compressa; quando poi si muove O_2 verso O_1, l'attrito del liquido fa inclinare *t* in modo che di fronte a *s* venga a trovarsi la fenditura di β_2, entro cui passerà *s* liberamente, senza esercitare azione alcuna. Con tale artifizio, o con qualunque altro che sodisfi alla condizione imposta, è chiaro che tutto il sistema ora aggiunto, trascurando, masse e attriti, non modifica le deformazioni già studiate, nelle quali O_1 e O_2 si muovono sempre ugualmente e contemporaneamente.

Se le deformazioni che si sovrappongono sono simultanee, supporremo che quella che si aggiunge si eserciti su I_1.

12. — Ad I_2 applichiamo una forza F costante e spostiamo I_1 nel senso *a*; ben presto β_1 viene a premere su O_2 e I_2 obbedisce ad F: l'allungamento cresce, specialmente quando v_1 si apre. Per rilevanti escursioni di I_1, se F è grande a sufficienza, si apre la v_2, i *g'* scorrono e si ha allungamento permanente grande: tutto ciò anche se F ha agito per un tempo lunghissimo.

Se I_1 retrocede, quando *s* preme su β_2, I_2 torna ad obbedire alla forza F.

Tanto nella torsione che nella detorsione si ha dunque allungamento.

Il fatto che quando la tensione di S_1, cioè la coppia C, varia rapidamente il moto di O_1 è piccolo, e i minimi cambiamenti di C si hanno quando O_1 si sposta molto, spiega le variazioni dell'allungamento nei vari momenti d'una torsione e detorsione sinusoidale [1]).

Se poi F è assai grande, la pressione di β_1 apre la v_2, il moto di O_1 è facilitato, v_1 si apre e la tensione di S_1 decresce e può anche annullarsi in seguito, allorchè v_2 si chiude e β_1 preme su O_2. Si spiegano così i fenomeni che ho trovato [2]);

1) Nuovo Cim., gennaio-febbraio 1906.
2) Rendic. R. Acc. d. Lincei, settembre 1906.

ma il modello indicherebbe che, seguitando ancora a torcere, dopo l'aumento di C dovrebbe avvenire una sua diminuzione, meno accentuata della prima. Con torsioni grandissime, la curva delle coppie dovrebbe presentare ondulazioni di ampiezza decrescente.

13. — Supponiamo di esercitare una torsione iniziale che non sposti i g e g', ritorniamo lentamente a coppia nulla ed applichiamo in I_1 una carica crescente: I_2 deve spostarsi verso d da prima con rapidità, poi con lentezza. Se invece la torsione preparatoria è grande, O_1 e O_2 si allontanano molto quindi la forza che agisce su I_1 può anche finire per muovere I_2 nel senso a.

Il modello indica che questi fenomeni prodotti da allungamento a coppia nulla devono dipendere moltissimo dalla velocità di torsione e detorsione, non solo per la grandezza delle variazioni che si producono, ma anche pel loro segno. In particolare con detorsione di tale lentezza, che al ritorno a coppia nulla S_3 fosse alla sua lunghezza di riposo, la carica in I_1 provocherebbe il moto di I_1 sempre nel senso a.

Così pure i fenomeni, facilmente prevedibili, di allungamento ad azimut costante, ed anche i precedenti, devono dipendere molto dalla velocità di trazione.

L'effetto della carica sulla curva di torsione, la perdita di coppia che essa produce a torsione costante, i fenomeni susseguenti a coppia nulla, l'influenza di arresti nei vari casi, ecc. sono nel modello interpretabili con assai facilità ed è possibile prevedere molti fatti variamente complicati.

14. — *Incrudimento.* — L'esperienza prova che durante una deformazione la materia cambia più o meno di natura, cioè si incrudisce. E il modello spiega queste modificazioni: se non si tratta di deformazioni piccolissime, varia più o meno sensibilmente la posizione delle molle S_1 e S_2 rispetto ai g e g', sia col variare delle forze, sia col mutare della loro durata di azione. La stessa configurazione può raggiungersi in modi diversi, e la stessa posizione di I_1 e I_2 può corrispondere a differenti stati delle molle.

È bensì possibile riportare il punto figurativo nello stesso punto del piano forza-deformazione da cui si è partiti, ma la

esperienza, correttamente eseguita, ha mostrato all'evidenza che lo stato della materia si trova cambiato e che è impossibile annullare e diminuire l'incrudimento con deformazioni comunque scelte, anche se alternate e decrescenti secondo una data legge.

Ciò è chiaro nel modello: nessun moto può fare uscire una sola spira delle molle dal di sotto dei *c*.

15. — In conclusione, il modello può rendere conto, almeno nelle loro linee generali e, a causa dell'insufficienza dei dati sperimentali, qualitativamente, dei principali e più cospicui fenomeni elastici che presentano i fili di rame. Può ben darsi che disciplinando le ricerche col variare sistematicamente e velocità, e cariche, e torsioni, e arresti in diversi punti, si giunga a concludere che esso non rappresenta proprio i fenomeni che in complesso spiega, o ne rappresenta solo alcuni: in tal caso occorrerebbe forse complicarlo assai.

Ad ogni modo mi sembra non privo d'interesse il fatto che esso può sovente servire di guida nelle ricerche sperimentali ove, mancando il soccorso della teoria, specialmente quando si tratta di deformazioni sovrapposte, si è sempre proceduto di necessità per tentativi, cercando di conoscere all'ingrosso il complesso dei fatti.

E non sembra difficile modificarlo in guisa che possa render conto degli interessanti fenomeni che presenta il piombo, o meglio l'eutettica di piombo-stagno, e di quelli molto singolari del causciù.

R. Liceo Garibaldi
Napoli, marzo 1907.

CALORI SPECIFICI DEI LIQUIDI CHE SOLIDIFICANO A TEMPERATURA MOLTO BASSA.

Nota di A. BATTELLI [1]).

1. — È di grande importanza per la termodinamica e per la fisica molecolare in generale, la conoscenza degli elementi termici dei corpi alle più basse temperature. Io perciò mi sono accinto da alcun tempo alla ricerca sperimentale dei più fondamentali fra questi elementi (calcoli specifici, calori di fusione e di vaporizzazione, dilatazione termica); e in questa prima Nota dò relazione dei risultati ottenuti pei calori specifici di alcuni liquidi che solidificano a temperatura molto bassa.

Non esistono ancora su questo argomento che scarse e isolate determinazioni. Non si possono chiamare temperature molto basse quelle a cui arrivò il Regnault, il quale nei suoi classici lavori si spinse per varie sostanze (cloroformio, solfuro di carbonio, olio di trementina, cloruro di etile, ioduro di etile, cloruro di etilene, cianuro di etile e tetracloruro di etilene) al di sotto di 0° C., ma non discese mai oltre i — 30° C.

Così pure non oltrepassò questo limite, anzi non lo raggiunse neppure, il Nadejdine che studiò [2]) l'alcool etilico, l'etere etilico, l'alcool isoamilico, l'alcool isobutilico, gli alcool propilico e isopropilico, l'isoamilene, il formiato di etile e l'anidride solforosa liquida; la minima temperatura infatti, a cui egli sperimentò, fu di — 21° C.

Il primo studio sul calore specifico dei liquidi a temperature molto basse fu quello dell'Eckerlein [3]) sopra l'etere di petrolio.

Egli usò il metodo delle mescolanze: l'etere di petrolio veniva rinchiuso dentro una sfera cava di ottone, la quale ve-

1) Dai Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVI, 1° sem. 1907.
2) Journ. de la Soc. Phys-Chim. Russe, 16, pag. 222 (1884).
3) Ann. d. Phys., ser. IV, vol. 8, pag. 120 (1900).

niva raffreddata in un bagno di olio di trementina mantenuto dentro una miscela frigorifera, e poi veniva portata in un calorimetro pure ad olio di trementina.

L'Eckerlein operava a tre temperature diverse: a — 16°,50, — 78°,30 e — 185°,38, e teneva sempre il liquido calorimetrico alla temperatura ordinaria. In tal modo l'autore determinava soltanto il calore specifico medio dell'etere di petrolio fra queste temperature e quella dell'ambiente. Però il valore da lui ottenuto alla temperatura dell'aria liquida è assai dubbio, perchè egli non si è curato di accertarsi se l'etere di petrolio da lui usato non congelasse, almeno in parte, a quella temperatura: cosa che del resto era probabilissima.

Esistono poi delle determinazioni di calore specifico dell'ossigeno e dell'azoto liquidi fatte da H. Alt [1]) nell'intervallo fra — 200° e — 183° C. per il primo, e fra — 208° e — 196° C. per il secondo. L'autore raffreddava una certa quantità di liquido al disotto della sua temperatura di ebullizione per mezzo di una rapida evaporazione; poi lo riscaldava di alcuni gradi mediante una spirale percorsa da una corrente elettrica ed immersa nel liquido stesso. Il calore così fornito serviva in parte per riportare la temperatura del gas liquefatto fino alla temperatura di ebullizione, in parte per evaporarne una certa porzione. Quest' ultima poteva essere determinata pesando il liquido prima e dopo l'esperienza; e siccome l' autore aveva già in precedenza misurato il calore di evaporazione delle stesse sostanze, possedeva tutti gli elementi per il calcolo del calore specifico. L'autore teneva conto del calore che il liquido prendeva dall' esterno, determinando la quantità di sostanza spontaneamente evaporata in un secondo.

L' incertezza inerente a questo genere di misure, che traspare dall'esposizione del metodo, si rivela pure in un notevole errore dei risultati; i quali, secondo l' autore, sono approssimati a meno del 3 %.

2. — Le mie esperienze sono limitate finora alle sostanze che sono liquide alla temperatura ordinaria, ma ho già comin-

1) Ann. d. Phys., ser. IV, vol. 13, pag. 1022 (1904).

ciato pure lo studio dei gas liquefatti, e fra non molto spero di riferirne i risultati.

La disposizione sperimentale da me adottata, permette di ottenere anche a temperatura molto bassa una buona precisione.

L'apparecchio consiste essenzialmente in un vaso cilindrico di Dewar nel quale è posto il liquido da studiare. Entro questo pesca una spirale metallica che viene riscaldata mediante la corrente elettrica; così si può comunicare al liquido una certa quantità di calore. Facendo due esperienze con due diverse quantità di liquido, si misura l'equivalente in acqua del calorimetro e il calore specifico del liquido.

Il vaso di Dewar, che serve da recipiente calorimetrico, è di forma cilindrica, a pareti speculari, del diametro di circa 6 cm. e dell'altezza di 20 cm. Esso mediante un apposito sostegno è situato entro un altro vaso dello stesso genere, di molto maggiori dimensioni, largo circa 12 cm. e profondo 90 cm.

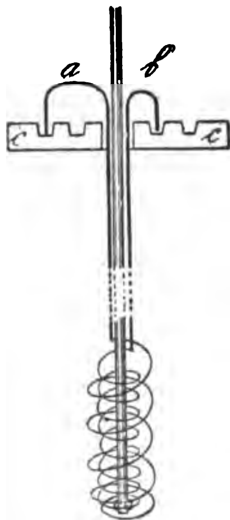


Fig. 1.

La spirale che serve a riscaldare il liquido è avvolta su due diametri differenti per utilizzare il maggiore spazio pos-

sibile (fig. 1), ed è sorretta da una canna di vetro che viene a costituire l'asse della spirale stessa.

Lungo questa canna sono ad essa fermati per mezzo di legature di seta, i capi della spirale, che mediante due orecchiette *a* e *b* (fig. 2) vanno a pescare in due pozzetti anulari scavati in uno scodellino di bosso *c*; il quale è forato nel mezzo per dare passaggio all'asticella di vetro e ai fili che formano l'estremità della spirale.

I due pozzetti di mercurio fanno capo a due serrafili per i quali la corrente può essere lanciata entro la spirale.

La sommità dell'asse di vetro è raccomandata al pernio di un movimento d'orologeria, cosicchè tutta quanta la spirale può assumere un movimento rotatorio mentre è percorsa dalla corrente, compiendo così il doppio ufficio di tenere agitato il liquido e di elevarne la temperatura.

Occorreva ancora che durante le esperienze il vaso di Dewar, che compieva propriamente l'ufficio di calorimetro, fosse chiuso in modo perfetto, non tanto per evitare l'irraggiamento calorifico, quanto per poter operare al riparo dell'umidità atmosferica. Alcune delle sostanze infatti che io sottoposi all'esperienza erano molto avide d'acqua.

Arrivai a conciliare questa condizione con quella della perfetta mobilità della spirale ricorrendo al seguente sistema di chiusura, che mentre rendeva il tappo perfettamente girevole, permetteva allo stesso tempo di avere nell'interno una pressione alquanto differente da quella atmosferica.

Intorno al recipiente (fig. 2) è masticiato presso l'orlo l'anello di bosso *a*; e nel vano lasciato fra esso e il Dewar si versa del mercurio nel quale pesca il bordo del tappo *b*, pure di bosso. Quest'ultimo è forato nel mezzo e porta un corto tubo di vetro *c* per dar passaggio all'asse della spirale. Nel tappo *b* è scavato uno scodellino *f* contenente mercurio nel quale va ad immergersi l'estremità inferiore del tubo di vetro *d*. Questo tubo è solidale coll'asse della spirale mediante un tappo isolante che chiude il tubo a perfetta tenuta e attraverso al quale passano i capi della spirale stessa.

3. — La spirale era costituita da un filo di nichelina della lunghezza di circa 5 metri del diametro di mm. 0,785.

La sua resistenza a temperatura di 12° era di 5,600 Ohm.

L'impiego della nichelina era molto opportuno, sopra tutto perchè, essendo il coefficiente di temperatura di questa lega

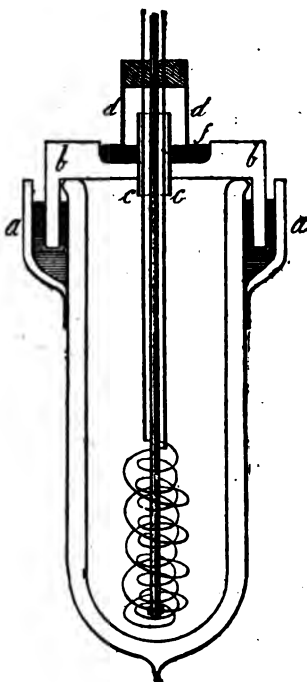


Fig. 2.

molto piccolo, non ero costretto nello scendere a temperature molto basse, a cambiare l' intensità della corrente per avere una quantità di calore sensibilmente uguale a quella che si aveva a temperatura ordinaria.

Per calcolare la quantità di calore $i^2 r$ sviluppata dalla corrente nella spirale, la resistenza della spirale stessa veniva misurata direttamente mediante il ponte di Wheastone alla temperatura alla quale si faceva l' esperienza, e l' intensità della corrente era indicata da un opportuno milliamperometro. Mi ha servito come tale un millivoltmetro Hartmann della portata di 300 millivolt e della resistenza di 10 Ohm, munito di shunt

conveniente. Quest'ultimo venne costruito con due pezzi, posti in quantità, di cm. 18,44 ciascuno, di un filo di nichelina avente la resistenza di 0,65077 Ohm per metro: in tal modo 50 divisioni del millivoltmetro corrispondevano ad un ampère.

Per la misura delle temperature mi sono servito di due coppie termoelettriche rame-costantana, di cui l'una dava la temperatura della sommità e l'altra del fondo del liquido: e ciò per esser sicuro che la temperatura fosse bene uniforme in tutto il vaso calorimetrico.

Dico subito che l'equilibrio della temperatura si raggiungeva in breve tempo in modo perfetto, e si manteneva tale per tutta la durata delle esperienze, in grazia al movimento piuttosto veloce che dall'apparato di orologeria veniva comunicato alla spirale.

Il galvanometro, sul quale mediante un commutatore a pozzetto di mercurio venivano chiuse le coppie, aveva una resistenza di circa 500 Ohm, assai grande, perchè in confronto di essa fosse trascurabile quella presentata dal filo costituente le coppie, il quale era soggetto a variazioni di cui era impossibile o difficilissimo tener conto.

Una grave difficoltà nella condotta dell'esperienza, era quella di poter ottenere, entro il recipiente calorimetrico, il liquido raffreddato alla temperatura di fusione. Dopo molti tentativi trovai che il metodo migliore era quello di porre la sostanza già congelata entro l'apparecchio preventivamente raffreddato coll'aria liquida.

Per eseguire l'operazione, si fa dapprima congelare il liquido entro la provetta — che ho dovuto costruire di robusta lamina di ottone, perchè molti di cotesti liquidi solidificano in cristalli minutissimi con aumento considerevole di volume, per modo che scoppiano tutti i recipienti di vetro in cui sono contenuti: di poi si comincia col versare alcuni centimetri cubici di aria liquida ben limpida (cioè assolutamente esente da ghiaccio e da anidride carbonica) entro il Dewar che serve da calorimetro, chiudendolo immediatamente con un tappo di gomma, ed agitandolo in modo che si raffreddi più che sia possibile nella sua parte superiore. Infine, gettata via repentinamente

l'aria liquida, si capovolge sul Dewar la provetta metallica in cui si trova preventivamente congelata la sostanza.

A poco a poco la sostanza si liquefa in vicinanza delle pareti della provetta metallica, e un cilindro solido della sostanza in istudio scende dentro il Dewar. Se anche qualche goccia di aria liquida fosse rimasta in fondo al vaso, viene subito scacciata, perchè il punto di ebollizione dell'aria è molto inferiore a quello di fusione dei liquidi da me impiegati.

Chiuso il Dewar, si aspetta che la sostanza sia quasi completamente sciolta, quindi si introduce nel recipiente calorimetrico la spirale di nichelina messa in rapida rotazione dal movimento di orologeria. Dopo circa quindici minuti la temperatura è generalmente distribuita in modo uniforme nel liquido. Si fanno allora al galvanometro le letture della temperatura di minuto in minuto, per quattro minuti consecutivi affine di tener conto dell'irraggiamento; poi si lancia nella spirale la corrente notando la deviazione dell'amperometro. Interrotta infine la corrente si rifanno di minuto in minuto le letture al galvanometro.

Nel caso delle esperienze qui riferite il liquido contenuto nel vaso calorimetrico era di circa cm.^{3} 300, e nella spirale si faceva passare circa 2 Ampère per due minuti primi.

L'irraggiamento era in tali condizioni debolissimo: esso non produceva ordinariamente variazioni di temperatura superiori a $\frac{1}{20}$ C.° per ogni minuto primo.

Ciò permetteva di ottenere per i calori specifici, anche alle più basse temperature, valori altrettanto buoni quanto alle temperature ordinarie.

4. — Un esempio dimostra subito l'esattezza che si può raggiungere con questo metodo.

Prendiamo il solfuro di carbonio alla temperatura di circa 0° C., alla quale fu pure studiato da Regnault.

Da una determinazione della prima serie si ebbe:

P = 388,8

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	—1,05	
2	—1.00	
corrente { 3	—0,95	1,86
4	—	1,85
5	1,35	1.87
6	1,4	
7	1,45	

$r = 5,56$

P = 520,4

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	—1,1	
2	—1,05	
3	—1,0	1,85
4	—	1,85
5	0,95	1,85
6	1,0	
7	1,5	

$r = 5,56$

Indicando con E l'equivalente in acqua del calorimetro e con c il calore specifico del solfuro di carbonio si ha:

$$\{388,8 \times 2,2\}\, c + E \times 2,2 = 0,240 \times 1,86^2 \times 120 \times 5,56$$
$$\{520,4 \times 1,85\}\, c + E \times 1,85 = 0,240 \times 1,85^2 \times 120 \times 5,56$$

da cui $c = 0,238$.

Da una determinazione della terza serie, eseguita con un altro Dewar ma con la stessa spirale, si ebbe poi

P = 350,2

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	—1,74	
2	—1,67	
3	—1,60	1,87
4	—	1,86
5	+1,20	1,88
6	+1,23	
7	+1,28	

$r = 5,56$

P = 315,3

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	—0,90	
2	—0,85	
3	—0,82	1,885
4	—	1,89
5	+1,61	1,89
6	+1,65	
7	+1,70	

$r = 5,57$

l'aria liquida, si capovolge sul Dewar la provetta metallica in cui si trova preventivamente congelata la sostanza.

A poco a poco la sostanza si liquefa in vicinanza delle pareti della provetta metallica, e un cilindro solido della sostanza in istudio scende dentro il Dewar. Se anche qualche goccia di aria liquida fosse rimasta in fondo al vaso, viene subito scacciata, perchè il punto di ebollizione dell'aria è molto inferiore a quello di fusione dei liquidi da me impiegati.

Chiuso il Dewar, si aspetta che la sostanza sia quasi completamente sciolta, quindi si introduce nel recipiente calorimetrico la spirale di nichelina messa in rapida rotazione dal movimento di orologeria. Dopo circa quindici minuti la temperatura è generalmente distribuita in modo uniforme nel liquido. Si fanno allora al galvanometro le letture della temperatura di minuto in minuto, per quattro minuti consecutivi affine di tener conto dell'irraggiamento; poi si lancia nella spirale la corrente notando la deviazione dell'amperometro. Interrotta infine la corrente si rifanno di minuto in minuto le letture al galvanometro.

Nel caso delle esperienze qui riferite il liquido contenuto nel vaso calorimetrico era di circa cm.^{3} 300, e nella spirale si faceva passare circa 2 Ampère per due minuti primi.

L'irraggiamento era in tali condizioni debolissimo: esso non produceva ordinariamente variazioni di temperatura superiori a $\frac{1}{20}$C.° per ogni minuto primo.

Ciò permetteva di ottenere per i calori specifici, anche alle più basse temperature, valori altrettanto buoni quanto alle temperature ordinarie.

4. — Un esempio dimostra subito l'esattezza che si può raggiungere con questo metodo.

Prendiamo il solfuro di carbonio alla temperatura di circa 0° C., alla quale fu pure studiato da Regnault.

Da una determinazione della prima serie si ebbe:

P = 388,8

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	−1,05	
2	−1.00	
3	−0,95	1,86
corrente 4	—	1,85
5	1,35	1.87
6	1,4	
7	1,45	

$r = 5,56$

P = 520,4

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	−1,1	
2	−1,05	
3	−1,0	1,85
4	—	1,85
5	0,95	1,85
6	1,0	
7	1,5	

$r = 5,56$

Indicando con E l'equivalente in acqua del calorimetro e con c il calore specifico del solfuro di carbonio si ha:

$$\{388,8 \times 2,2\}\, c + E \times 2,2 = 0,240 \times 1,86^2 \times 120 \times 5,56$$
$$\{520,4 \times 1,85\}\, c + E \times 1,85 = 0,240 \times 1,85^2 \times 120 \times 5,56$$

da cui $c = 0,238$.

Da una determinazione della terza serie, eseguita con un altro Dewar ma con la stessa spirale, si ebbe poi

P = 350,2

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	−1,74	
2	−1,67	
3	−1,60	1,87
4	—	1,86
5	+1,20	1,88
6	+1,23	
7	+[illegible]	

P = 315,3

Tempo in minuti	Temperature	Intensità della corrente
1	−0,90	
2	−0,85	
3	−0,82	1,885
[illegible]	[illegible]	[illegible]

r [illegible]

da cui risulta $c = 0,239$.

I due valori di c, ottenuti nelle due differenti serie, sono molto concordanti fra loro, e concordano pur bene col valore

$$c = 0,23523,$$

che si ha per la temperatura di 0° C. dalla tavola di Regnault.

5. — I liquidi da me studiati furono: l'etere etilico, il toluolo, il bromuro di etile, l'etere di petrolio, l' alcool etilico, l'alcool amilico, il solfuro di carbonio.

Per ciascuno furono fatte almeno due serie di determinazioni, e fu presa poi la media dei risultati, i quali sono riportati nelle seguenti tabelle.

In esse la colonna contraddistinta con t contiene i valori osservati dell' innalzamento della temperatura corretti dall'irraggiamento, la colonna i contiene i valori dell' intensità della corrente, la r quelli della resistenza della spirale, la θ quelli delle temperature medie a cui furono fatte le esperienze, e la colonna c finalmente contiene i valori dei calori specifici.

Nelle linee orizzontali contraddistinte colla lettera P, sono i dati che si riferiscono alle misure fatte col peso minore del liquido, e in quelle contraddistinte con P_1 sono i dati spettanti al peso maggiore del liquido stesso.

La corrente, come è già stato detto, passava per 120 secondi.

Etere etilico.

Fu acquistato dalla casa Erba e distillato sul cloruro di calcio. Il suo punto di fusione era esattamente — 117 . C.

$P = 250,8$ $P_1 = 300,0$

	t	*i*	*r*	θ	Temperatura media	*c*
P	2,04	1,76	5,25	— 93,0	— 91°,37	0,514
P_1	2,57	1,96	5,26	— 89,75		
P	2,31	1,84	5,30	— 74,0	— 74,5	0,516
P_1	1,90	1,85	5,29	— 75,0		
P	2,27	1,86	5,37	— 46,6	— 50,05	0,517
P_1	1,88	1,85	5,35	— 53,5		
P	2,44	1,93	5,42	— 35,0	— 36,1	0,519
P_1	2,02	1,85	5,41	— 37,2		
P	2,31	1,88	5,48	— 18,2	— 21,3	0,523
P_1	2,04	1,86	5,46	— 24,4		

I valori del calore specifico dell' *etere etilico* decrescono dapprima assai rapidamente colla temperatura; in seguito le variazioni divengono sensibilmente proporzionali agli intervalli di temperatura secondo un coefficiente di proporzionalità piccolissimo.

Toluolo.

Il toluolo adoperato in queste esperienze proveniva dalla Casa Erba; esso fu sottoposto alla distillazione frazionata per liberarlo dallo *Xilolo* e dal *Benzolo* e poi distillato sul cloruro di calcio per renderlo anidro.

$P = 236,0$ $P_1 = 342,3$

	t	i	r	θ	Temperatura media	c
P	2,85	1,87	5,25	— 93,6	— 92,02	0,353
P_1	2,05	1,74	5,26	— 90,45		
P	2,79	1,86	5,27	— 84,35	— 83,44	0,355
P_1	1,55	1,73	5,27	— 82,54		
P	2,85	1,88	5,31	— 72,8	— 71,52	0,357
P_1	1,99	1,72	5,32	— 70,25		
P	2,82	1,87	5,33	— 62,15	— 62,8	0,360
P_1	2,06	1,75	5,33	— 63,6		
P	2,64	1,83	5,38	— 44,35	— 47,37	0,365
P_1	2,07	1,76	5,36	— 51,4		
P	2,66	1,84	5,46	— 23,75	— 25,00	0,380
P_1	2,00	1,75	5,45	— 26,35		

Il calore specifico del toluolo decresce rapidamente con la temperatura, per quanto le variazioni si facciano minori approssimandosi al punto di fusione, nelle cui vicinanze l'andamento può essere abbastanza bene rappresentato da una equazione lineare.

Bromuro di Etile.

Fu preparato nell' Istituto mediante la nota azione dell'alcool sul bromuro potassico in presenza dell' acido solforico; indi chiarificato con carbonato sodico e ripreso con acido solforico alla temperatura di — 27° C; dopo un abbondante lavaggio fu in seguito distillato sul cloruro di calcio.

$P = 395,4$ $P_1 = 535,5$

	t	i	r	θ	Temperatura media	c
P	2,84	1,83	5,20	—109,6	—105,47	0,195
P_1	2,53	1,89	5,19	—101,35		
P	2,81	1,83	5,28	— 88,1	— 89,45	0,196
P_1	2,55	1,89	5,25	— 90,8		
P	2,81	1,84	5,31	— 68,95	— 66,32	0,199
P_1	2,67	1,92	5,33	— 63,7		
P	2,86	1,84	5,38	— 40,3	— 39,62	0,202
P_1	2,65	1,92	5,38	— 38,95		
P	2,94	1,89	5,44	— 28,8	— 28,82	0,205
P_1	2,56	1,89	5,44	— 28,85		

I valori del calore specifico del bromuro di etile variano in modo affatto analogo a quelli dell'etere etilico.

Etere di Petrolio.

Fu acquistato dalla casa Erba, il suo punto di ebullizione era tra 35° e 40° C.; diveniva pastoso ma non congelava nell'aria liquida. Le determinazioni furono spinte fino al punto in cui era ancora perfettamente liquido.

P = 256,3 P_1 = 320

	t	i	r	θ	Temperatura media	c
P	2,65	2,15	4,99	— 162,4	— 161°,2	0,588
P_1	1,87	1,93	5,00	— 160,0		
P	2,67	2,03	5,08	— 125,32	— 126,91	0,592
P_1	1,87	1,94	5,07	— 128,5		
P	2,69	2,14	5,23	— 94,15	— 96,15	0,596
P_1	1,84	1,90	5,20	— 98,1		
P	2,68	2,14	5,28	— 74,9	— 74,15	0,601
P_1	1,87	1,91	5,30	— 73,4		
P	2,74	2,16	5,35	— 52,7	— 52,95	0,604
P_1	1,86	1,90	5,35	— 53,2		
P	2,74	2,15	5,45	— 27,1	— 25,55	0,608
P_1	1,91	1,92	5,56	— 24,0		

Il calore specifico di questo miscuglio varia pochissimo, e a meno di quantità che rientrano negli errori di osservazione, proporzionalmente alla temperatura.

Alcool etilico.

Fu preparato dall'alcool a 95° del commercio sottoponendolo prima alla distillazione nell'ossido di calcio; poi sul sodio metallico. Il punto di fusione a — 130 C. era prova non dubbia della purezza assoluta del preparato.

P = 222,3 P_1 = 326,3

	t	*i*	*r*	θ	Temperatura media	*c*
P	2,78	1,94	5,26	—90,15	—90°,7	0,457
P_1	1,83	1,75	5,25	—91,25		
P	2,77	1,94	5,27	—84,65	—82,67	0,459
P_1	1,86	1,76	5,28	—80,70		
P	2,74	1,93	5,31	—71,4	—71,2	0,463
P_1	1,78	1,73	5,31	—71,0		
P	2,84	1,97	5,40	—39,3	—38,37	0,486
P_1	2,02	1,85	5,41	—37,85		
P	2,64	1,92	5,44	—29,15	—27,97	0,497
P_1	2,25	1,80	5,45	—26,8		

Il calore specifico di questo corpo varia notevolmente colla temperatura e con legge quasi parabolica, anche in prossimità del punto di fusione.

Alcool amilico.

Proveniva dalla Casa Erba ed era purissimo (esente da furfurolo). Per averlo anidro fu fatto digerire per quattro giorni nel cloruro di calcio e poi filtrato in ambiette perfettamente asciutto. Questo alcool non congelava perfettamente neppure a — 100° pur tuttavia a — 60° circa diveniva talmente vischioso che già a questa temperatura le determinazioni non erano attendibili.

$P = 236,3$ $P_1 = 300,1$

	t	t'	r	θ	Temperatura media	c
P	2,29	1,78	5,36	— 53,3	— 49,15	0,455
P_1	2,15	1,84	5,37	— 45,0		
P	2,26	1.78	5.39	— 41,2	— 40,2	0,462
P_1	2,13	1,84	5,40	— 39'2		
P	2,43	1,85	5,42	— 33,7	— 31,7	0,469
P_1	2,14	1,85	5,43	— 29,7		
P	2,45	1,86	5,44	— 28,3	— 27,3	0,473
P_1	2,17	1,86	5,45	— 26,3		
P	2,43	1,84	5,48	— 18,5	— 19,4	0,480
P_1	2,16	1,80	5,47	— 20,3		
P	2,37	1,85	5,52	— 8,7	— 9,55	0,492
P_1	1,87	1,75	5,51	— 10,4		

I valori del calore specifico dell'alcool amilico decrescono con legge affatto analoga a quella che si riscontra per l'alcool etilico.

Solfuro di carbonio.

Venne acquistato dalla Casa Erba filtrato accuratamente e sottoposto alla distillazione coll'acido solforico.

$P = 388$ $P_1 = 520,3$

	t	*i*	*r*	*θ*	Temperatura media	*c*
P	2,70	1,79	5,24	— 97,0	— 95°,75	0,195
P_1	2,56	1,86	5,25	— 94,5		
P	2,89	1,84	5,30	— 74,05	— 71,15	0,194
P_1	2,59	1,86	5,31	— 68,25		
P	2,65	1,77	5,33	— 62,5	— 59,4	0,196
P_1	2,69	1,90	5,35	— 56,3		
P	2,65	1,78	5,37	— 44,8	— 44,2	0,201
P_1	2,83	1,97	5,37	— 43,6		
P	2,89	1,86	5,46	— 25,22	— 26,54	0,213
P_1	2,63	1,92	5,45	— 27,86		
P	2,80	1,86	5,48	— 17,92	— 18,23	0,217
P_1	2,75	1,97	5,48	— 18,54		
P	2,20	1,86	5,56	+ 0,20	+ 0,09	0,238
P_6	1,85	1,85	5,56	— 0,02		

Il calore specifico del solfuro di carbonio decresce assai rapidamente con la temperatura da 0 + a — 45 circa; in seguito assume un valore che si può ritenere quasi costante e prossimo a 0,195.

6. — Le curve riprodotte nelle fig. 3 e 4 mostrano a colpo d'occhio il comportamento dei calori specifici di tutti i liquidi

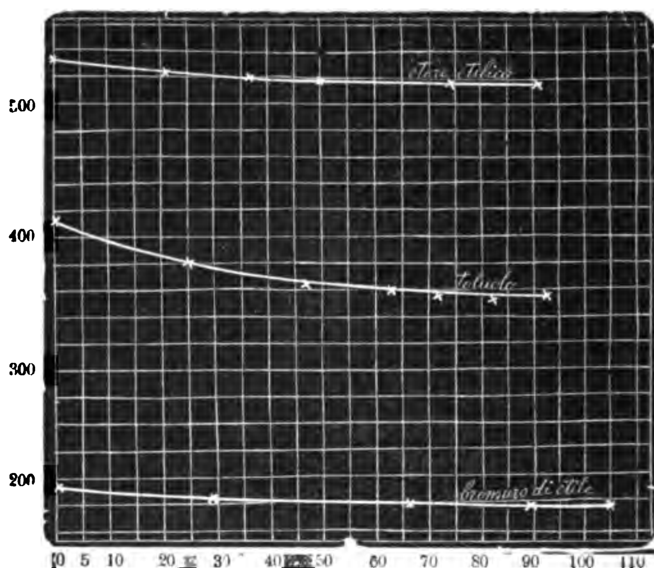


Fig. 3.

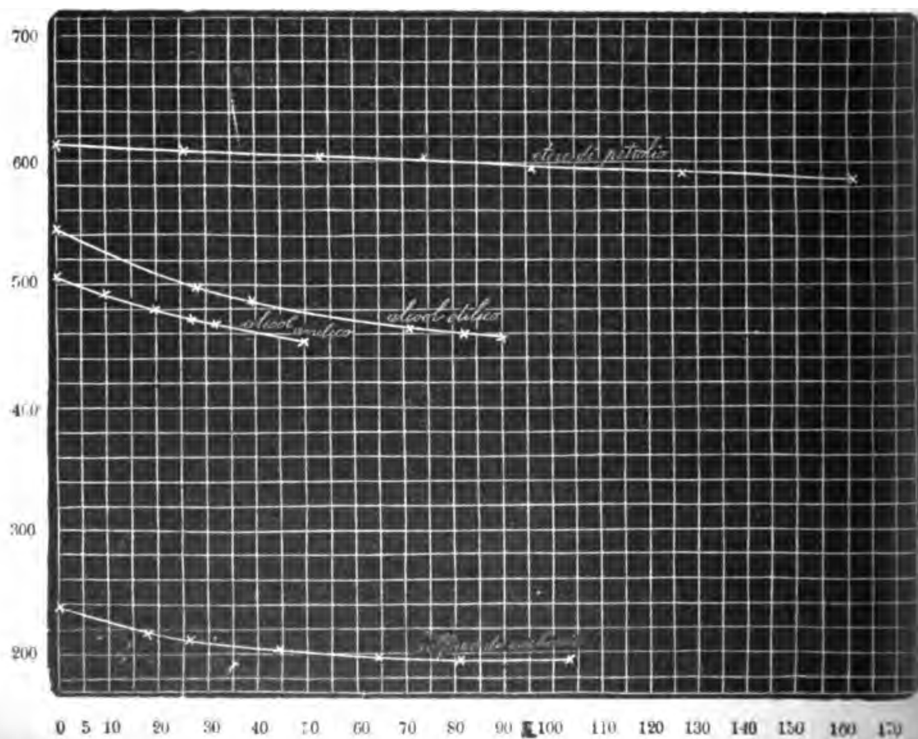


Fig. 4.

da me studiati; e si vede subito come queste curve tendano a diventare, alle temperature più basse, asintotiche ad una parallela all'asse delle temperature.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLA DISPERSIONE ELETTRICA NELL'ARIA

Dott. G. ACCOLLA [1].

In questi ultimi tempi la dispersione elettrica nell'aria è stata oggetto di lungo studio, del quale i signori Elster e Geitel si possono chiamare i promotori. Non è nella mia intenzione riferire qui le proprietà elettriche dell'aria atmosferica, ormai troppo note, messe in evidenza dalle indagini di una numerosa schiera di sperimentatori, che hanno quasi tutti seguita la via tracciata dai due fisici tedeschi, e nemmeno tentare di dare un cenno della relativa estesissima bibliografia.

Dovendo per tutto l'agosto scorso assentarmi da Catania e andare ad abitare nei pressi di Augusta in una località chiamata Corso-Vigo, bagnata dal mar Jonio e piantata a vigneto, pensai d'impiegare quel tempo a studiare la dispersione elettrica dell'aria in un sito tanto differente, in riguardo all'ubicazione, da quello in cui trovasi il Laboratorio di Fisica dell'Università di Catania, e nel frattempo eseguire delle misure analoghe in una grotta naturale scavata nel calcare tenero del colle Tauro e denominata Grotta del Monaco.

A tale scopo mi son fatto costruire dal meccanico di questo Laboratorio, A. Rubino, un apparecchio in ottone il quale, pur non allontanandosi tanto dal classico tipo di Elster e Geitel [2], nella forma si avvicina dippiù a quello ideato da Wilson [3], e come questo ha, grazie alla sua piccolezza, il pregio di essere facilmente trasportabile.

1) Atti Acc. Gioenia di Scienze nat. in Catania. Ser. 4.a Vol. XX.
2) Phys. Zeitsch. 5 Jahrg. S. 321; 1904.
3) Le Radium. — Fasc. 6, p. 207; déc. 1904.

Esso è chiaramente rappresentato in sezione, e in grandezza uguale a metà del naturale, dalla figura 1 ed è costituito essenzialmente del piccolo elettroscopio E sostenuto della vite V che lo può portare all' altezza opportuna avvitandosi più o meno alla base AA' del cilindro CC', il quale è fornito di due acconcie finestrine circolari, chiuse con lastrine di vetro a facce piane e parallele, che permettono la lettura della deviazione della fogliolina.

Il cilindro CC' avvitandosi all' anello BB' stringe il sottile dischetto d' alluminio *aa'* che porta nel mezzo un piccolo foro per dar passo al gambo dell' elettroscopio, con cui si può perfettamente centrare in maniera da garentirne il perfetto isolamento ed evitare nel contempo, a causa della sua piccolezza, le rapide comunicazioni dell' aria contenuta in CC' con l'aria ambiente e di preservare così la fogliolina dai bruschi movimenti.

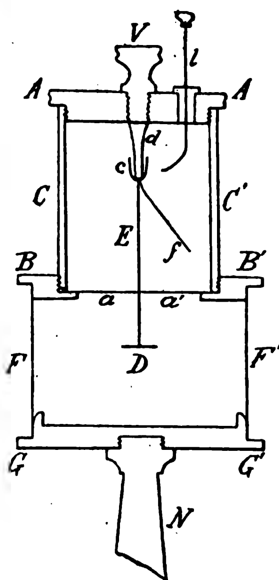


Fig. I

Il cilindro FF' mercè due attacchi a baionetta è congiuuto con BB' e con la piattaforma circolare GG', sostenuta

da una piccola colonna N che termina inferiormente con un treppiedi munito di tre viti di livello.

L'elettroscopio è isolato per mezzo di un bastoncino di dielettrina *d*, la quale, pur essendo meno fragile dello zolfo, offre come questo un perfetto isolamento senza bisogno di far uso dei soliti essiccatori al sodio. La estremità inferiore dell' isolante è attaccata ad una campanellina *c*, e mediante tale disposizione suggerita dal Prof. Righi [1]) vengono di molto attenuate, se non completamente eliminate, le irregolarità dovute alla penetrazione della carica nell' isolante.

L'elettroscopio consta di una stretta asticella alla quale è attaccata la sottile e bene scelta fogliolina d'alluminio *f*, e che inferiormente si prolunga in un gambo che sorregge il dischetto D che fa da dispersore.

Il cilindro FF' non si adopera che quando l'apparecchio è in riposo; durante le misure viene sostituito con un altro cilindro il quale porta tre larghe finestre, che permettono la libera circolazione dell'aria in contatto col dispersore.

Il filo *l* ripiegato come mostra la figura e isolato da AA' mercè un cilindretto di dielettrina, permette di caricare l'elettroscopio. Per risparmio di tempo la fogliolina si porta quasi alla posizione voluta toccando ripetutamente e delicatamente D mediante un pezzettino di dielettrina sostenuto mercé un'asticella di vetro, il che permette di asportare all'elettroscopio delle cariche piccole variazioni nel potenziale di cariche piccolissime e ottenere delle piccole variazioni nel potenziale di carica dell'elettroscopio.

La caduta della fogliolina viene osservata per mezzo d' un cannocchialino, posto a circa 72 cm. da essa, insieme all' immagine d' una scala graduata, comprendente un arco di circa 60°, disegnata con tutta cura su carta a grana fine attaccata ad una lastrina di vetro, immagine che si ottiene per mezzo d' una lente acromatica, avente cm. 13,2 di distanza focale, situata a cm. 16,5 e cm. 65,6 dalla fogliolina e dalla scala rispettivamente.

1) N. C. T. IX, Ser. V. p. 53; 1905.

Il tutto è montato su un sostegno a cerniera (per agevolarne il trasporto) sorretto da tre piedi e in modo che sia facile smontare i diversi pezzi e rimetterli al preciso posto quando si vogliono eseguire misure in luoghi differenti e a breve distanza di tempo.

Le misure di dispersione vengono fatte misurando il tempo t che la fogliolina impiega nel cadere sempre di una determinata divisione della scala e in ogni caso con cariche negative; l'inversa di questo tempo $d = \frac{1}{t}$, rappresentando un numero proporzionale alla velocità di caduta, è da me presa come misura della dispersione etettrica nell'aria.

Mi rincresce non avere potuto graduare in volta l'elettroscopio, perchè caricandolo a circa 200 volta (massimo potenziale costante di cui posso disporre) ottengo una deviazione della fogliolina ben lontana da quella con la quale ho eseguite le misure, e quindi non posso esprimere la dispersione con la caduta di potenziale in volta-ora. Del resto si tratta di misure relative e i valori che avrei ottenuto in questo secondo caso sono proporzionali a quelli che riporto in seguito e com' essi dipendono esclusivamente dall' apparecchio adoperato.

Il potenziale al quale è portata la fogliolina è superiore ai 200 volta, valore abbastanza elevato per potere affermare che le misure di dispersione sono state eseguite con il regime della corrente di saturazione.

L' apparecchio si presta a delle misure precise e sui valori trovati, non ho creduto opportuno introdurre il termine di correzione dovuto ad imperfetto isolamento dell' elettroscopio, giacchè mantenendo questo in un ambiente saturo d' umidità e col dispersore circondato dal cilindro FF' intero, la fogliolina impiega circa 15 ore a cadere della solita divisione, quindi l' errore che potrei commettere nel ritenere l' isolamento come perfetto, è inferiore al limite di precisione che il metodo consente.

La grotta della quale feci cenno al principio di questo lavoro trovasi a poca distanza dal mare e si apre sul versante italiano SE del colle Tauro a poche centinaia di metri

dalla punta d'Izzo. Essa ha un'ampia e irregolare bocca alta circa 5 metri e larga 8 e si estende da SE a NW per una sessantina di metri. La altezza si mantiene quasi quanto quella della bocca e la sua larghezza circa 6 metri, solo nella parte più interna la sua ampiezza diviene maggiore e la volta più bassa; da molti punti di questa sgocciola dell'acqua che, per la natura calcarea del luogo, è stata causa della formazione di numerose stalattiti più o meno sviluppate. A circa 34 metri dalla bocca, e precisamente accanto all'orciolo che vi si trova per raccogliere l'acqua che proviene dallo scolo più abbondante (acqua che serve a dissetare i rari passanti e i marinai che pescano in quei paraggi) si apre un'angusta e completamente buia diramazione, che si estende per circa 15 metri da N a S e poi comunica con la costa mercè uno strettissimo e irregolare passaggio lungo una diecina di metri.

Tale diramazione rappresenta la parte più recondita della grotta e l'aria vi ristagna completamente: le misure di dispersione l'ho eseguite colà, e per confronto anche all'aria libera in vicinanza dell'ingresso della grotta, a più riprese durante i tre giorni (8, 10 e 13 agosto) che mi ci potei recare.

Quantunque la temperatura si mantenesse costantemente vicina a 22°, mentre che all'esterno saliva all'ombra a circa 32°, l'aria immobile quasi satura d'umidità non permetteva una lunga dimora nell'interno della grotta e quindi il numero delle osservazioni eseguite è abbastanza limitato.

Però dalle cifre ottenute risulta chiaramente che la dispersione dell'aria nell'interno della grotta è espressa dal valore medio $d = 0,330$ mentre che all'aria libera il valore trovato per d è 0.091.

La dispersione elettrica nell'interno della grotta ha dunque un valore circa tre volte e mezza che all'aria libera, mentre che la radioattività della roccia calcarea, nella quale essa è scavata, è pressochè trascurabile.

Ogni serie di osservazioni aveva la durata di circa tre ore durante le quali la dispersione andava man mano diminuendo sino ad assumere un valore di quasi $^1/_3$ di quello iniziale in capo ad un paio d'ore: tale diminuzione si verifi-

cava in ragione del viziarsi dell' aria per effetto dei prodotti della combustione della candela stearica, che dovevo necessariamente tenere accesa per mettere a posto gli apparecchi, per illuminare la scala e un po' anche l' ambiente per non sdrucciolare su quel suolo quasi lubrico.

Tale fatto già notato da Elster e Geitel [1]) durante le misure eseguite nella grotta di Baumanns (Harz) trova un riscontro nell'altro per cui la dispersione nel primo giorno mi risultò maggiore che nel secondo, e ancora più piccola trovai quella del terzo giorno.

Le prime misure di dispersione furono da me eseguite nel Laboratorio di Fisica dell' Università di Catania in una stanza esposta a ponente, ben aereata e tenuta sempre a finestre aperte, durante i giorni compresi tra il 18 e il 23 luglio scorso e come media di 24 osservazioni in generale abbastanza concordanti ho ottenuto per t il valore di 23 minuti, al quale corrisponde per d il valore 0,043.

Altre misure ho eseguite nello stesso luogo dopo il mio ritorno in Catania, dal 4 al 15 settembre e come media di 31 osservazioni ho trovato per t il valore di 22 minuti per cui $d = 0{,}045$.

Il resto delle misure di dispersione all' aria libera sono state fatte nella casa campestre in cui soggiornai, come ho detto in principio, durante tutto l' agosto scorso. La stanza nella quale gli apparecchi erano situati è fornita di tre ampie aperture, le quali permettevano che l' aria continuamente si rinnovasse e le misure venivano fatte, per quanto più potevo con continuità, durante le ore diurne.

Come media di 128 osservazioni ho ottenuto per t il valore di 11 minuti a cui corrisponde $d = 0{,}090$.

Misurando la dispersione corrispondente alle diverse ore del giorno e facendo le medie orarie dei valori trovati in circa 15 giorni, durante i quali le condizioni atmosferiche si sono mantenute ottime e senza perturbazioni, ho ottenuti i numeri consegnati nella seguente tabella, dai quali si rilevano

1) Phys. Zeitsch. 2 Jahrg. S. 560; 1901.

subito le variazioni giornaliere della dispersione elettrica nell'atmosfera dalle ore 6 del mattino alle 18.

	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h	13^h	14^h	15^h	16^h	17^h	18^h
t	2	5	8	11	9	9	8	7	7	8	10	15	21
d	0,500	0,200	0,125	0,090	0,111	0,111	0,125	0,143	0,143	0,125	0,100	0,066	0,048

La curva rappresentativa della fig. II mostra ancora meglio l'andamento diurno della dispersione: essa è ottenuta prendendo per ascisse le ore e per ordinate i corrispondenti valori della dispersione.

Essa mostra in modo evidente la relazione esistente tra i valori della dispersione e i valori dell' umidità relativa, giacchè questa, come ha dimostrato il sig. Cavasino [1]) per

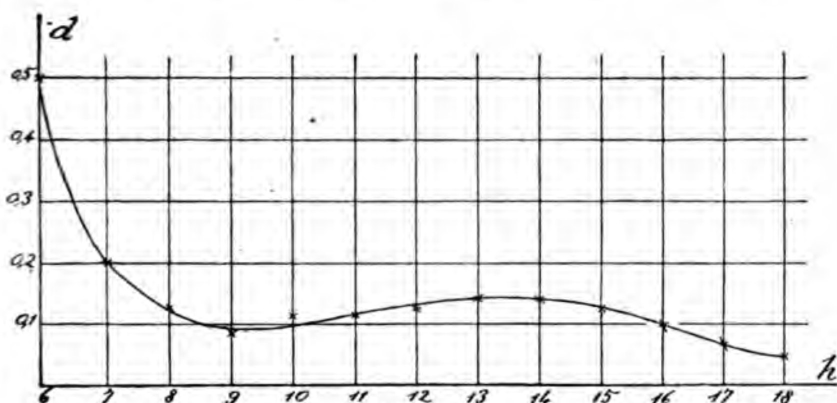


Fig II

Catania e come si verificherà probabilmente su tutta la costa orientale della Sicilia, passa per un minimo nelle prime ore del mattino, raggiunge un massimo verso le 9, scende ad

1) Boll. dell'Acc. Gioenia, Fasc. LXXXVI, p. 15; 1905,

un minimo verso le 13 e poi aumenta sino al tramonto del sole, risulta cioè che la dispersione diminuisce con l'aumentare dell'umidità relativa dell'atmosfera, fenomeno di già constatato dai signori Elster [1]), Pochettino [2]), Gockel [3]) ed altri.

Ho potuto altresi notare durante le numerose osservazioni eseguite che la dispersione è maggiore quando il cielo è sereno e meno accentuata quando esso è coperto, quantunque poche volte il cielo si fosse mostrato annuvolato.

Il Gockel è forse l'autore che più di tutti si è occupato della dispersione elettrica dell'aria, avendo eseguite delle misure in diversi luoghi della Svizzera e persino in Tunisia: egli ha notato che l'andamento della dispersione durante il giorno si può dire variabile da luogo a luogo, il che è confermato dalle misure da me eseguite. Tale andamento, oltre che dipendere da quello dell'umidità relativa e secondo certi autori anche dallo andamento diurno del potenziale atmosferico, sarà certamente collegato con le condizioni topografiche del luogo nel quale si eseguiscono le osservazioni.

Il forte valore della dispersione intorno alle 6 del mattino sin dal primo giorno d'osservazione mi parve strano e subito pensai che fosse dovuto a qualche causa d'errore e nei giorni successivi usai ogni precauzione per mettermi a riparo di essa. Però moltiplicando le osservazioni mi dovetti convincere della loro esattezza e inoltre che tale forte dispersione mattutina dipendeva dalla direzione del vento che allora spirava sempre da SE direttamente dal mare. Tale forte ionizzazione dell'aria proveniente dal mare è stata altresi constatata dai signori Löwy e Müller [4]) nelle loro misure eseguite a Westerland nell'isola di Sylt e nell'isola di Helgoland e non mi par giusto formulare delle spiegazioni stante che la dispersione elettrica dell'aria marina è stata sinora poco studiata,

M'interessa infine far rilevare il confronto tra i valori della dispersione in Catania e in Augusta. Dalle cifre prece-

1) Phys. Zeitsch. 2 Jarhg. S. 116; 1900.
2) Rend. Acc. dei Lincei V. X, p, 104; 1° sem. 1901.
3) Arch. des Sc. Phys. et Nat. T. XVII, p. 93; 1904.
4) Phys. Zeitsch. 5 Jahrg. S. 290; 1904.

dentemente riportate emerge che essa in Catania si è mantenuta alla distanza di circa 45 giorni quasi immutata e che il suo valore medio è pressochè la metà di quello che compete alla dispersione dell'aria in Augusta. Questa notevole differenza non è a mio credere da ascrivere alla maggiore o minore vicinanza col mare, nè deve attribuirsi alla folta vegetazione che riveste il terreno nella seconda località, come risulta dalle osservazioni fatte dal sig. Bergwitz [1]) nel margine e nel mezzo di una pineta nelle vicinanze di Clausthal (Harz) e dalle ricerche del sig. P. Becquerel [2]) sulla radioattività dei vegetali, essa è probabilmente dovuta alla radioattività della terra vegetale, che da apposite misure eseguite mi è risultata notevolmente maggiore di quella dei materiali da costruzione (lave dell'Etna) comunemente adoperati in Catania.

Avrei voluto studiare con cura e sistematicamente l'andamento diurno della dispersione elettrica in Catania; ma, non potendomici dedicare con quell'assiduità che richiede il metodo di Elster e Geitel, ho pensato di costruire un apparecchio che come quello suggerito dal sig. Nordmann [3]) permetta con una sola lettura di misurare il valore della dispersione in un dato istante, e spero tra non molto di avere gli strumenti che mi occorrono a tal fine.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Catania, Nov. 1906.

---

1) Phys. Zeitsch. 7 Jarhg. S. 696; 1906.
2) C. R. T. CXL, p. 54; 1° sém. 1905.
3) Journ. de Phys. T. IV, p. 258; 1905.

SULLA RADIOATTIVITÀ DI ALCUNE ROCCIE E TERRE.

Dott. G. ACCOLLA [1]).

Molti sperimentatori si sono occupati della radioattività di fanghi, terre e rocce di diverse regioni d' Italia e quindi non m'è parso privo d' interesse lo studio della radioattività del materiale geologico del territorio di Augusta, i cui campioni furono quasi tutti raccolti da me durante l'agosto scorso ed altri pochi da cortesi amici che sentitamente ringrazio.

L'apparecchio adoperato è quello a campana di Elster e Geitel; soltanto l' elettroscopio ne è poco differente, giacchè esso è ad una sola fogliolina d'alluminio ed è munito di un piccolo e leggero dispersore cilindrico che sormonta l' asticciuola avvitata all'estremità superiore della breve striscia di ottone alla quale la fogliolina è attaccata. L' isolamento di questo elettroscopio è ottenuto con un bastoncino di dielettrina secondo la disposizione indicata nel mio precedente lavoro sulla dispersione elettrica nell'aria [2]) e la lettura della deviazione della fogliolina viene fatta con i medesimi apparecchi, ma su una scala graduata più grandetta. L' elettroscopio si trova poi entro una scatola cubica di 5 cm. di lato e la campana cilindrica che ricopre il tutto ha la capacità di circa 6 litri.

L'elettroscopio è graduato in volta mediante una batteria di piccoli accumulatori, e nell' intervallo in cui ho eseguite le misure una divisione della scala corrisponde a 5,0 volta.

La misura della radioattività d' una sostanza viene fatta adottando il metodo (incomodo ma preciso) del potenziale costante e del tempo variabile, cioè misurando il tempo che la fogliolina impiega a cadere di una determinata divisione per

1) Dal Boll. dell'Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania, fasc. XCII, gennaio 1907.

2) Atti dell'Acc. Gioenia, S. 4ª, Vol. XX, 1907.

effetto della dispersione della sola aria quando la campana è a posto e il tempo di caduta quando, rimanendo tutto nelle stesse condizioni, entro la campana trovasi il piattello contenente la sostanza, della quale s' impiega costantemente il peso di 100 gr.

La differenza tra la caduta espressa in volta-ora nel secondo caso e quella dovuta all' aria solamente esprime in volta-ora la radioattività della sostanza.

Evidentemente i numeri ottenuti sono relativi all' apparecchio adoperato; ma per avere un dato di riferimento ho misurato la radioattività di una sostanza completamente inattiva ben mescolata con dell' uranio metallico in polvere, nella proporzione di 99 gr. per ogni grammo d' uranio e dopo ho riferiti i valori della radioattività delle sostanze a quello di quest' ultima.

Ho preferito questo modo di confronto, anzichè quello con dell' uranio metallico, perchè a mio credere la radioattività conferita artificialmente ad una sostanza inattiva risponde dippiù alla realtà, perchè, com'è noto, le sostanze poco attive si possono considerare come costituite di materiale inattivo mescolato a qualche sostanza attiva, in certi casi in proporzioni sparutisime.

La caduta della fogliolina viene in ogni caso osservata lungo la divisione ai cui estremi corrispondono per il potenziale i valori di 178 e 173 volta e le misure son fatte sempre con carica positiva.

Questo potenziale è abbastanza elevato per ritenere di aver operato col regime della corrente di saturazione; ma io me ne sono voluto accertare sperimentalmente misurando la dispersione in diversi punti della scala.

Le sostanze sono state esaminate a quasi due mesi di distanza da che furono raccolte, esse sono state ben disseccate, ridotte in polvere e poi vagliate con uno staccio a maglie strette.

Per ognuna di esse ho eseguite due misure, che in generale sono risultate concordantissime; le poche volte in cui non si è avuta tale concordanza ho eseguito a più riprese, con la sostanza e senza di essa, la misura della dispersione

e in ogni caso ho fatto la media dei valori corrispondenti. Durante ogni serie di misure la dispersione dovuta all'aria si è mantenuta quasi costante, perchè trattandosi di sostanze poco attive l'apparecchio non ha dimostrato attivazione apprezzabile.

Prima di ridurre in polvere il materiale raccolto mi son fatto aiutare nel suo riconoscimento dal prof. S. Consiglio Ponte, al quale porgo i miei sentiti ringraziamenti. Ho rinunziato a riportare la descrizione petrografica dei singoli campioni perchè essa, anche se particolareggiata, non può assolutamente precisare il materiale esaminato; solo accanto a ciascuna sostanza ho indicata genericamente la località dove è stata raccolta. I campioni che nella seguente tabella vanno dal numero 13 al 22 inclusivi sono stati raccolti lungo la linea ferroviaria che va da Brucoli ad Agnone e precisamente in contrada di Arcile (Cozzo Turchi e Porte Rosse) ove sono evidenti le vestigia di antica vulcanicità.

Nella colonna segnata con la lettera A sono riportati i numeri che esprimono in volta-ora la dispersione dovuta all'aria, in quella segnata con AS quelli che rappresentano la dispersione dovuta all'aria ed alle sostanze e nell'altra le differenze tra i secondi e i primi, ossia i numeri che esprimono in volta-ora la radioattività delle sostanze. Nella colonna intestata con R sono riportati i numeri che ne rappresentano la radioattività riferita a quella del tufo calcareo inattivo uranato all' 1 °/₀ presa come unità.

N.	SOSTANZA	Disp. in volta-ora			R
		A	AS	S	
1	Terra vegetale di contrada Corso-Vigo a 15 cm. di profondità	16.4	35.4	19.0	0.134
2	Terra vegetale di contrada Corso-Vigo a 50 cm. di profondità	18.2	42.0	23.8	0.168
3	Panchina (concrezione calcarea conchigliare sottostante	14.4	22.5	8.1	0.058
4	Terra vegetale di contrada Terravecchia	20.8	35.2	14.4	0.102
5	Tufo calcareo sottostante	22.3	22 3	—	—
6	Calcare tenero di Grotta del Monaco	18.5	18.9	0.4	0,003
7	Calcare tenero (altro campione)	19.5	20,5	1.0	0.007
8	Calcare di stalattiti (Grotta id.)	17.7	18.0	0.3	0.002
9	Argilla comune ferrugginosa (Marina Levante)	26.7	41.3	14.6	0.103
10	Argilla comune bleu (Marina Levante)	24.5	41.5	17.0	0.120
11	Argilla comune chiara (Stazione)	18.8	40.7	21.9	0.155
12	Argilla comune chiara cotta (Stazione)	22.1	26.0	3.9	0.027
13	Argilla scagliosa	21.9	29.2	7.3	0.052
14	Basalte giallognolo (in decomposizione)	18.7	29.9	11.2	0.079
15	Tufo basaltico calcareo	18.2	33.0	14.8	0.104
16	Basalte limonitico grigio acciaio	21.2	24.0	2.8	0.020
17	Tufo basaltico	19.4	25.0	5.6	0.040
18	Basalte grigio oscuro	15.8	18.4	2.6	0.018
19	Detrito basaltico grigio oscuro	17.0	23.5	6.5	0.046
20	Sabbia basaltica	19.5	31.2	11.7	0.082
21	Basalte oscuro	19.7	21.8	2.1	0.014
22	Detrito basaltico oscuro	19.1	26.2	7.1	0.050
23	Lava dell'Etna	20.2	21.2	1.0	0.007
24	Fango della sorgente d'acqua solfurea di Brucoli	15.8	37.1	21.3	0.150
25	Sabbia di Marina Levante	20.7	23.8	3.1	0.022
26	Fango del lido di Marina Palma	16.2	26.0	9.8	0.069
27	Fango della salina Regina	25.6	30.9	5.3	0.037
28	Sale marino della salina Regina	30.4	30.4	—	—
29	Sabbia del fiume Pantaglia	22.3	28.8	6.5	0.046
30	Sabbia del fiume Simeto	17.9	25.5	7.6	0.054
31	Tufo calcareo inattivo uranato all'1 °/₀	28.3	169.8	141.5	1

Com'è noto, per ogni sostanza radioattiva non si può ritenere che la dispersione da essa provocata sia proporzionale alla massa che s'impiega, giacchè la legge secondo la quale la dispersione dipende dalla massa, a parità di superficie libera irradiante, varia con la natura della sostanza e probabilmente anche con l'apparecchio adoperato. Ho voluto quindi vedere come dipenda la radioattività di alcune delle

sostanze esaminate dalla massa e come media di parecchie misure eseguite con tutta cura, con masse crescenti e decrescenti, ho ottenuti i risultati riportati nella seguente tabella.

SOSTANZA	DISPERSIONE IN VOLTA-ORA CON					
	gr. 100	gr. 75	gr. 50	gr. 25	gr. 12,5	gr. 6,25
Campione. . . . 2	23.4	21.0	9.7	5.0	—	—
» . . . 11	21.9	15.4	10.6	5.6	—	—
» . . . 24	21.7	21.4	10.1	5.3	—	—
» . . . 31	141.5	137.0	131.3	94.8	45.8	23.2

Da un rapido esame di queste cifre risulta che la proporzionalità tra la massa impiegata e la dispersione provocata esiste approssimativamente per il campione 11 da 100 gr. in sotto, mentre pei campioni 2 e 24 esiste per un limite più ristretto e per il campione 31 si verifica da 25 gr. in giù.

È da notare inoltre la lieve differenza (dovuta certamente a errori di osservazione) esistente tra i valori della dispersione relativa a 100 gr. dei campioni 2, 11, 24 e i valori corrispondenti che compariscono nell' altra tabella, ottenuti a circa 1 mese di distanza.

Conclusioni.

Da quanto ho esposto precedentemente risulta:

1. Le roccie e le terre esaminate sono poco radioattive e le principali disposte in ordine di attività decrescente risultano così classificate: terre vegetali e argille comuni, tufi e detriti basaltici, calcare tenero e tufo calcareo.

2. La radioattività dell' argilla con la cottura diventa abbastanza esigua.

3. I tufi e i detriti basaltici sono più attivi delle rocce basaltiche da cui derivano.

4. Le sabbie fluviali e i fanghi dei lidi marini esaminati hanno una radioattività piuttosto bassa e dello stesso ordine di grandezza.

5. La radioattività della lava etnea, delle rocce calcaree e del sale marino è trascurabile.

6. Il fango della sorgente d'acqua solfurea di Brucoli ha una radioattività dell'ordine di quella delle terre vegetali, troppo bassa perchè ad essa possano attribuirsi le proprietà terapeutiche che all'acqua e ai fanghi di tale sorgente sono state riconosciute.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Catania.
Dicembre 1906.

SULLA RADIOATTIVITÀ DEI FANGHI TERMALI DEPOSITATI NEGLI STABILIMENTI DEI BAGNI DI LUCCA (TOSCANA).

Nota del Dott. G. MAGRI [1]).

In una precedente comunicazione [2]) misi in evidenza la radioattività dei fanghi depositati dalle sorgenti termali dei Bagni di Lucca; accennai pure nella Nota ricordata che era in corso uno studio diretto a stabilire a quale delle sostanze radioattive dovevasi quella forte attività. Lo studio ci proponemmo di farlo in collaborazione il prof. Antony ed io, se non che il prof. Antony, con gentile profferta, volle che fosse da me continuato.

Era ovvio che lo studio dei fanghi si dovesse volgere su due punti importanti:

1° Separazione in gruppi delle sostanze in essi contenute ed esame di uguali pesi di queste all'elettroscopio.

2° Studio fisico della emanazione emessa da una soluzione del fango comunque ottenuta.

Per il primo quesito applicai il metodo sistematico di analisi variamente modificato ove l'occorrenza si fece sentire; pel secondo i metodi generali di ricerca suggeriti dal Soddy [3]).

Per le determinazioni di radioattività mi valsi dell'elettroscopio descritto nella Nota precedente; per le ricerche sulle sostanze solide mi servì la forma I; per le altre adottai un dispersore cilindrico alto mm. 70 e del diametro di mm. 44 posto entro la campana alta mm. 99 e del diametro di mm. 140.

Il fango da me adoperato in queste ricerche è un misto dei fanghi delle diverse sorgenti. Asciugato e seccato, liberato

1) Dai Rendic. R. Acc. Lincei, vol. 15, S. 5ª, fasc. 11°, 2° sem. 1906.

2) Rendic. R. Acc. Lincei, vol. 15, S. 5ª, 1° sem. 1906, pag. 14.

3) Radio-activity, Lendon, Electrician eeries, 1904.

con staccio dai pezzi più grossi di roccia, pesava circa 1600 gr. Di questo ne fu prelevato un campione d'assieme di 200 gr. ed altri 300 gr. furono sciolti la metà in acqua regia, l'altra in acido solforico diluito, per lo studio dell'emanazione.

Come si vede potei avere a mia disposizione un materiale molto scarso, poichè per la separazione in gruppi mi rimasero soltanto circa gr. 1100. Feci l'attacco della sostanza con acqua regia per asportare dalla silice il più possibile delle sostanze mescolatevi. Con questo attacco a caldo si avverte un certo odore disgustoso molto probabilmente dovuto a sostanze organiche che vengono decomposte.

Ottenuta così la soluzione di quasi tutto il ferro esistente nel fango, filtrai e lavai prima per decantazione, poi, a più riprese, sul filtro; il residuo, che era costituito da sabbia silicea fu asciugato e risultò del peso di g. 750, Si trattava dopo questa operazione di sottoporre la soluzione tirata a secco e ripresa con acqua e acido cloridrico all'azione dell'idrogeno solforato, e qui si presentarono due quesiti: o far agire l'idrogeno solforato direttamente, o ridurre prima il sale ferrico a ferroso. Io ho creduto di non adoperare direttamente l'idrogeno solforato, perchè dato il volume ragguardevole del liquido e la grande quantità di ferro in esso contenuto, si sarebbe avuta nella riduzione una abbondante formazione di solfo, che sarebbe poi stato difficile eliminare dal precipitato, e che facilmente sarebbe stato trascinato nei gruppi successivi.

Tentai allora una riduzione elettrolitica mediante idrogeno nascente svolgentesi su di un catodo di platino posto al fondo di un alto vaso cilindrico, mentre l'anodo di carbone rimaneva separato dal liquido per mezzo di una membrana porosa.

Abbandonai ben presto tale tentativo, non tanto perchè la riduzione avveniva lentamente e con poco esito per la forte quantità di cloro che emanava dall'anodo e da questo si spandeva sulla superficie del liquido da ridurre, quanto anche perchè sul catodo si formavano dei depositi coi quali

era ammissibile si venisse a depositare o condensare in parte la sostanza attiva.

Credetti quindi opportuno di ricorrere alla riduzione del sale ferrico mediante anidride solforosa malgrado le reazioni secondarie cui questa riduzione avrebbe potuto dar luogo. E difatti, sotto l'azione di quella, si venne a formare un deposito prevalentemente costituito da solfato calcico con piccole quantità di bario e di stronzio; lo raccolsi e lo lavai con soluzione di acido solforico, quindi dopo averlo asciugato in muffola ne determinai il peso che era di gr. 85.

Scacciai in seguito dal liquido l'anidride solforosa con un getto abbondante di anidride carbonica e poi aggiunsi idrogeno solforato in soluzione quindi continuai nella precipitazione con corrente di idrogeno solforato gassoso. Si depositò con ciò al fondo del recipiente un'abbondante precipitato giallo chiaro, il quale analizzato risultò costituito da solfuro di arsenico per la massima parte e da traccie di piombo.

Lavato ed asciugato pesava gr. 19. Tirato a secco il liquido separato dai solfuri, ripreso quindi con acqua ed acido cloroidrico e fatta una ricerca su parte di questo per l'acido borico ne ebbi resultato negativo. Nel rimanente liquido feci gorgogliare del cloro a caldo per ricondurre al massimo il sale di ferro, e con ciò avvenne una nuova precipitazione di solfato calcico con silice. Il precipitato, lavato e asciutto pesava 8 gr.

Al liquido rimanente aggiunsi quindi ammoniaca con che ebbi abbondante precipitato rosso mattone che resultò costituito da ferro per la massima parte, poi manganese, alluminio ed ancora silice gelatinosa. Conteneva pure traccie di fosfati, ma in così piccola quantità che non credetti farne la eliminazione per le successive ricerche. Pesava 280 gr.

La precipitazione di questo idrato non fu per altro completa poichè il liquido rimase leggermente colorato in giallo, e ciò facilmente si comprende quando si pensi che dovevo trattare volumi grandi di liquidi contenenti una data sostanza in grande eccesso sopra tutte le altre. Tirai nuovamente a secco la soluzione, ed eliminai i sali ammoniacali servendomi

di una muffola. Il residuo ripreso con acqua ed acido cloroidrico non si sciolse del tutto, ma lasciò indietro una sostanza bianca costituita da silice e da un po' di solfato calcico. Pesava 20 gr.

Nel filtrato ripetei il trattamento con ammoniaca ed ebbi a caldo un precipitato di idrato manganoso con tracce di ferro. Pesava gr. 3.

Il solfuro ammonico precipitò dal solfuro di manganese in piccola quantità (gr. 05). Eliminati nuovamente i sali ammoniacali in muffola, ebbi col carbonato ammonico un precipitato costituito da solo carbonato calcico; pesava 5 gr.

La soluzione da questo separata fu tirata a secco e il residuo contenente sali di sodio, potassio e magnesio venne arroventato. Raccolto pesava 3 gr.

Separate per tal maniera in gruppi le sostanze contenute nel fango ne esaminai all'elettroscopio 5 gr. per quelle di cui vi era questa quantità. Degli altri esaminai quella che avevo a disposizione.

In un quadro riporto indicate le sostanze separate dal fango il loro peso, la quantità °/₀₀, la quantità adoperata per le ricerche all'elettroscopio e l'attività loro.

Come confronto serva la dispersione di 1600 volta all'ora data da 2 decigr. di Pechblenda:

SOSTANZA	Quantità separata da gr. 1173,5 di fango	Quantità separata dal fango ‰	Quantità adoperata per le ricerche all'elettroscopio	Dispersione in Volta all'ora
Campione complessivo del fango	—	—	gr. 5	338,4
Residuo inattaccato dall'acqua regia ($Si O^2$.	gr. 750	639.08	» 5	23.7
Residuo dalla riduzione con SO^2 (contenente $BaSO^4$, $SrSO^4$, $CaSO^4$)	» 85	72.44	» 5	6.5
Solfuri (II gruppo) contenenti solfuro d'arsenico e traccie di solfuro di Pb . . .	» 19	16.19	» 5	943.1
Residuo dall'ossidazione con cloro contenente solfato calcico + silice	» 8	6.82	» 5	10.1
Precipit. dal III gruppo contenente Fe Al. Mn (fosfati e silice gelatinosa)	» 280	238. 6	» 5	340.0
Residuo dalla calcinazione per il IV gruppo contenente silice ($CaSO^4$ traccie) . . .	» 20	17.05	» 5	inattivo
Precipitato del III gruppo *bis* (Mn e traccie di Fe)	» 3	2.56	» 3	»
Precipitato del IV gruppo contenente manganese	» 0,5	0.43	» 0,5	»
Precipitato del V gruppo contenente carbonato calcico	» 5	4.27	» 5	»
Residuo dei sali di Mg. Na K	» 3	2.56	» 3	»
TOTALE . . .	1173,5	1000.00		

Osservando la tabella si può vedere a colpo d'occhio la qualità e l'approssimativa quantità delle sostanze contenute nel fango, ma più di tutto, riguardando la dispersione di ciascun gruppo, risulta evidente che l'attività si è concentrata spiccatamente nei solfuri rimanendo ancora forte nei precipitati del III gruppo ed apprezzabile nei solfati pesanti [1]).

1) Non tengo conto del residuo inattaccato dall'acqua regia, il quale è ancora attivo probabilmente perchè non liberato del tutto dal ferro che conteneva.

Se una conclusione si dovesse trarre riguardaudo i gruppi separati e le loro attività rispetto alle proprietà chimiche degli elementi radioattivi sino ad ora più noti, si dovrebbe ammettere nel fango la presenza di tre o quattro elementi.

1° Nel II gruppo il *Polonio* della sig.ª Curie [1]) o il *Radio-tellurio* di Marckwald [2]) o il *Radio-piombo* di Elster e Geitel [3]), di Giesel [4]) e Hofmann e Strauss [5]) che precipitano coi solfuri del II gruppo.

2° Nel III gruppo o l'*Attinio* o il *Torio*, od entrambi.

3° Nei solfati pesanti il *Radio*.

Queste considerazioni che sono di un interesse affatto particolare meritavano una conferma, che infatti ho potuto ottenere dallo studio della emanazione emessa dalle soluzioni del fango.

I metodi seguiti sono quelli che ho già rammentato proposti dal Soddy; riporto quindi senz' altro i risultati delle ricerche.

1° L'aria che sovrasta ad una soluzione dei fanghi in acqua regia lasciata a sè per dieci minuti primi ha un potere dispersivo nell'elettroscopio (Volta all'ora 19,5).

2° Togliendo via dalla campana il gas contenente l'emanazione, la velocità di dispersione decresce rapidamente e si riduce in pochi minuti ad un valore così piccolo da non esser più misurabile.

3° Dopo di aver lasciato il gas prima in un gazometro per dieci minuti primi, quindi nella campana dell'elettroscopio per trenta primi e dopo di averlo completamente scacciato si osserva che la sua presenza ha determinato una sensibile radioattività indotta (13 volta all'ora).

4° Porzioni del gas raccolte entro un gazometro e prese alla distanza di 4 in 4 giorni hanno mostrato che il

1) P. e S. Curie, Comp. Rend. 1898, t. CXXVII, pag. 175.

2) Markwald, Chem. Ber. 1902, t. XXXV, pagg. 2285 e 4239; 1903; t. XXXVI, p. 2662.

3) Elster e Geitel Wied. Ann. 1899, t. LXIX, pag. 83.

4) Giesel, Chem. Ber. 1901, t. XXXIV, pagg. 3569 e 3775.

5) Hofmann e Strauss, Chem. Ber. 1900, t. XXXIII, pag. 3126; 1901, t. XXXIV, pag. 3035; 1902 t. XXXV, pag. 1453.

potere scaricante dell'elettroscopio si riduce a $^{1}/_{2}$ del suo valore dopo 4 giorni appunto (da Volta all'ora 19,44 a 9,69).

Da tutto ciò si può ritenere accertata nei fanghi l'esistenza del Radio.

5° Tirando fuori il gas da una bottiglia contenente una soluzione solforica dei fanghi e raccogliendo l'emanazione fresca dopo pochi minuti, poi lasciando questa a sè per un minuto in un gazometro e ponendola quindi nella campana dell'elettroscopio si osserva che il gas è ancora attivo (Volta all'ora 19,8).

6° Se si carica negativamente per un ora ad alto potenziale il dispersore dell' elettroscopio sia in una campana ove circola l'emanazione, sia anche direttamente nel vaso che contiene la soluzione o semplicemente del fango asciutto e si esamina all'elettroscopio dopo 5 o 6 ore da quando fu tolto dal recipiente, l'attività che presenta si riduce a $^{1}/_{2}$ in 11 ore e persiste ancora dopo 2 giorni (da Volta all' ora 9,4 a 4,20 a 1,08).

Da tutto ciò si può concludere per la presenza del Torio.

Devo aggiungere un'osservazione importante:

L' emanazione delle soluzioni del fango presenta una debole attività in confronto alla dispersione determinata direttamente dal fango asciutto e sembra anche che le soluzioni cloroidriche siano un po' meno attive delle solforiche.

Per quanto siano piccoli i valori della dispersione, pure i resultati da me ottenuti sono sicuri perchè l'apparecchio di cui mi sono servito poteva apprezzare con sicurezza anche dispersioni molto minori, cioè di 2 Volta all'ora.

Conclusioni.

L'analisi da me eseguita ha fatto conoscere che il fango ha una composizione molto complessa.

L'esame all'elettroscopio dei gruppi separati dal fango ha dimostrato in esso la presenza di diverse sostanze radioattive ed i saggi fisici sulla emanazione sono andati in accordo

colle proprietà chimiche dei gruppi confermando la presenza del *Radio* e del *Torio.*

La debole attività dell'emanazione non permette per altro di concludere per la presenza o assenza dell' Attinio e rimane ancora in discussione a quale elemento sia dovuta la forte dispersione dei solfuri.

Ma poichè la separazione ha così ben corrisposto colle altre proprietà fisiche dell'emanazione complessiva del fango per due gruppi, mi credo autorizzato a ritenere che anche nel gruppo dei solfuri vi sia un altro elemento, che potrebbe essere il Polonio o uno degli altri sottoprodotti del Radio [1]).

---

1) F. Soddy, *Stato attuale della radioattività.* Le Radium, III, n. 7 (giugno 1906).

GIACOMO DEL TORRE

Terminati gli studi nell'istituto tecnico di Udine, sua patria, Giacomo Del Torre iniziò la sua carriera come assistente alla stazione agraria di Udine. Poco dopo, nel 1872, il professore Sestini lo scelse come assistente alla stazione agraria e all'istituto tecnico di Roma. In questi uffici il giovane Del Torre rivelò singolari attitudini sperimentali, e dette tali prove d' ingegno e di abilità didattica da essere stimato meritevole, poco più che ventenne, di succedere al prof. Sestini nell'insegnamento della Chimica all'istituto tecnico Leonardo da Vinci. Questo insegnamento tenne con grande onore sino alla morte, che improvvisamente lo colse, la sera del 5 aprile, nella età di 54 anni.

Ingegno forte e versatile, ebbe il Del Torre vasta cultura non solo nella Chimica ma anche nelle scienze affini; coltivò con predilezione la Fisica e la insegnò per due anni nell'istituto tecnico. Le nuove scoperte, le questioni più recenti, le applicazioni industriali della Fisica lo interessavano vivamente, e volle appartenere alla nostra Società fino dalla sua fondazione.

Sperimentatore abilissimo acquistò grande competenza nell' analisi delle acque; lascia una copiosa raccolta di dati e notizie relative a molte acque potabili e minerali. (Roma, tipografia Bertero 1894).

Si occupò altresì e lungamente di questioni di chimica enologica, di analisi di vini e di olii e dei mezzi per riconoscere varie sofisticazioni.

Ma dove il Del Torre spiegò maggiormente le sue mirabili qualità, dove profuse tutte le doti del suo ingegno fu nella scuola; all'insegnamento dedicò la maggior parte del suo tempo, il meglio delle sue forze.

Le sue lezioni riuscivano efficacissime e insieme dilettevoli sia per la chiarezza e la eleganza del linguaggio, che per le belle, varie, ingegnose esperienze da cui venivano illustrate. Il suo reputato Trattato di Chimica generale, che così rapidamente si è diffuso nelle scuole, dimostra il grande valore che il Del Torre ebbe come insegnante.

Di carattere franco e leale, fu stimato per le qualità morali, non meno che per la intelligenza e la operosità, dai numerosi colleghi che ne rimpiangono la fine immatura.

ENRICO STRACCIATI.

LETTERATURA FISICA

A. Fisica generale.

1. Generalità.

Fischer K. T. Vorschläge zur Hochschulausbildung der Lehramtskandidaten für Physik. *Phys. Zeit.* 8, pag. 211, 1907. (*Zeit. für phys. chem. Unt.* **20**, pag. 65, 1907).

Lodge O. Modern Views of the Ether. *Nature.* **75**, pag. 519, 1907.

Lodge O. The Density of the Aether. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 488, 1907.

Udny Jule G. Mean or Median. *Nature.* **75**, pag. 334, 1907.

Pocklington H. C. The natural units of mass, lenght, time. *Phil. Soc. Cambr.* 11 marzo 1907.

Einstein A. Berichtigung zu meiner Arbeit: Die Plancksche Theorie der Strahlung etc. *Ann. der Phys.* (**4**), **22**, pag. 800, 1907.

Lipps T. Naturwissenschaft und Weltanschauung. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* **20**, pag. 118, 1907.

Ehrenhaft F. Die Brownsche Molekularbewegung in Gasen. *Wien. Anz.* pag. 72, 1907.

Wangerin A. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte. **78**. Versammlung Stuttgart. Leipzig. F. C. W. Vogel, 1907.

Rebenstorff H. Vereinfachungen der Volumetrie der Gase. *Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw.* **13**, pag. 9, 1907.

Gutzmer A. Bericht über die Tätigkeit der Unterrichtskommission im verflossenen Jahre. *Verh. 78. Vers. Ges. D. Naturf. u. Aerzte.* Stuttgart. **1**, pag. 28, 1907.

Hampson W. Paradoxes and Principles. *Nature.* **75**, pag. 606, 1907.

2. Densità.

Guye P. A. Détermination exacte des densités gazeuses. *Arch. sc. phys. et nat.* (4), **23**, pag. 209, 1907.

3. Meccanica dei solidi. Elasticità. Potenziale.

Schlink W. Ueber Stabilitätsuntersuchungen von Raumfachwerken. *Jahresber. d. D. Math. Ver.* **15**, p. 46, 1907.

Mallock A. Relation between Breaking Stress and Extension in Tensile Tests of Steel. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* **78**, pag. 472, 1907.

Suchar P. J. Recherche de la loi que doit suivre une force centrale, sachant que la trajectoire est une conique, quelles que soient le conditions initiales. *Nouv. Ann. des Mathém.* (4), **6**, 1907.

Kellogg O. D. On the coniugated Potential. *Bull. of the Am. Math. Soc.* **13**, N. 4, 1907.

Korn A. Sur les équations de l'élasticité. *Ann. scient. de l'Ecole norm. supér.* (3), **24**, N. 1, 1907.

Scoble W. A. The strength and behaviour of brittle materials under combined stress. *Phys. Society Lond.* 25 gen. 1907.

Lecornu L. Sur une généralisation du mouvement de Poinsot. *Compt. Rend.* **144**, pag. 678, 1907.

Gray A. The attraction of Ellipsoidal Shells and of Solid Ellipsoids at external und internal Points, with some Historical Notes. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 385, 1907.

Zimmermann. Der gerade Stab auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längs gerichtete Kräfte. *Ak. der Wiss. Berlin.* 7 marzo 1907.

Hafen M. Ueber einige Potentialfunktionen. *Ak. der Wiss. Wien.* 10 gen. 1907.

Henri V. Coagulation du latex de caoutchouc et les proprietés élastiques du caoutchouc pur. *Soc. franç. de Phys.* 15 feb. 1907.

Witthembauer F. Aufgaben aus der technischen Mechanik. I. X+289 pag. Berlin, 1907.

Crémieu V. Recherches sur la gravitation. *Soc. franc. de Phys.* N. 256, pag. 3, 1907.

Girtler R. Ueber Extremwerte von Funktionen, die der Laplaceschen Gleichung genügen. *Wien. Anz.* **74**, 1907.

Crémieu V. Recherches comparées sur les forces de gravitation dans les gaz et les liquides. *Journ. de phys.* (4), **6**, pag. 284, 1907.

Girtler R. Ueber das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Mass der Bruchgefahr. *Akad. der Wiss. Wien.* 28 feb. 1907.

4. Meccanica dei Liquidi. Capillarità.

Kolosoff G. Sur quelques cas de mouvement d'un liquide dans un solide infini. *Am. Journ. of Math.* **27**, N. 4, 1907.

Wilson C. T. R. A curvature method for measuring surface tension. *Proc. phil. Soc. Cambr.* 28 gen. 1907.

Boussinesq J. Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi, sans contraction latérale et à nappe libre. *Compt. Rend.* **144**, pag. 668, 1907.

Lohnstein T. Weiteres zur Theorie der fallenden Tropfen. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 767, 1907.

Boussinesq J. Calcul de la contraction inferieure de la nappe sur un déversoir en mince paroi et de hauteur modérée, à nappe libre, armé à sa partie supérieure d'une plaque horizontale rejetant vers l'amont les filets fluides inférieurs. *Compt. Rend.* **144**, pag. 795, 1907.

5. Meccanica degli aeriformi.

Étévé A. Sur les aéroplanes. *Compt. Rend.* **144**, pag. 630, 1907.

Jougnet M. Sur les ondes de choc et de combustion sphériques. *Compt. Rend.* **144**, pag. 632, 1907.

Kármán Th. Ueber stationäre Wellen in Gasstrahlen. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 209, 1907.

Turnbull W. R. Researches on the Forms and Stability of aëroplanes. *Phys. Rev.* **24**, pag. 285, 1907.

Ferber F. Sur le coefficient de la résistance de l'air à adopter dans un projet d'aèroplane. *Compt. Rend.* **144**, pag. 680, 1907.

Prescott J. On convective Equilibrium of a spherical Mass of Gas subject only to the Mutual Gravitation of its parts. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 459, 1907.

6. Apparecchi.

Julius W. A. Ein Apparat zur Demonstration langsam fortschreitender Wellen. *Zeit für phys. chem. Unt.* **20**, pag. 87, 1907.

Schmidt G. C. Einige physikalische Vorlesungsversuche. *Zeit. für phys. und chem. Unt.* **20**, pag. 101, 1907.

Weiler W. Ein Apparat für Kreis-und harmonische Bewegung. *Zeit. für phys. und chem. Unt.* **20**, pag. 105, 1905.

Kleinen. Versuch über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* **20**, pag. 107, 1907.

Weiler W. Ein einfacher Erreger für Wasserwellen. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* **20**, pag. 107, 1907.

Volkmann W. Pappkästen für physikalischen Sammlungen. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* **20**, pag. 108, 1907.

Krebs. Appareil pour la mesure de l'écoulement des liquides. *Compt. Rend.* **144**, pag. 749, 1907.

D'Arsonval. Remarques au sujet de l'appareil présenté par M. Krebs. *Compt. Rend.* **144**, pag. 749, 1907.

Von **Voss R.** Ueber eine Vorrichtung zur geradlinigen Führung des Schreibstiftes bei registrierenden Messinstrumenten. *Der Mech.* **15**, pag. 25, 40, 52, 1907.

Steinhopf W. Apparat zum Kristallisieren und Filtrieren in indifferenten Gasen. *Chem. Ber.* **40**, pag. 400, 1907.

Bodenburg H. Neue automatisch wirkende Quecksilberluftpumpe. *Chem. Zentralbl.* **1**, pag. 601, 1907.

Raikow P. N. Einfache Methode zum Bohren von Glas. *Deut. Mech. Zeit.* pag. 47, 1907.

B. Fisica-chimica.

1. Generalità. Teoria. Pressione osmotica.

Berkeley (Earl of). Apparatus for the direct measurement of osmotic pressure. *Proc. Farad. Soc. Lond.* 29 genn. 1907.

Whetham W. C. D. Indirect methods of measuring osmotic pressure. *Proc. Farad. Soc. Lond.* 29 genn. 1907.

Kahlenberg L. The bearing of actual osmotic experiments upon the conception of the nature of solutions. *Proc. Farad. Soc. Lond.* 29 genn. 1907.

Morse H. N. Tables containing a summary of the recent experiments on the osmotic pressure made with glucose and canesugar. *Proc. Farad. Soc. Lond.* 29 genn. 1907.

Spring W. Sur les modifications subies par quelques phosphates acides à la suite d'une compression ou d'une déformation mécanique. *Arch. Scienc. Phys. et Nat.* (4), **23**, pag. 229, 1907.

Zsigmondy R. Ueber Kolloid-Chemie mit besonderer Berücksichtigung der anorganischen Kolloide. Leipzig. A. Barth. 1907.

Liesegang R. E. Entstehung von Kristallen unter seltsamen Verhältmissen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 541, 1907.

Beckmann E. Neue Versuche über die Molekulargrösse des Jods und die ebullioskopische Bestimmung relativ flüchtiger Stoffe. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 543, 1907.

van Laar J. J. Ueber den Dissociationsgrad gesättigter Lösungen eines Elektrolyten in verschiedenen Lösungsmitteln, und von Lösungen, welche im Teilungsgleichgewicht stehen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 567, 1907.

van Deventer C. M. Physikalische Chemie für Anfänger. XX+163 pag. Leipzig. 1907.

Walker J. Introduction to Physical Chemistry. 402 pag. London. Macmillan, 1907.

de Lury R. E. The rate of oxidation of arsenious acid by chromic acid. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 47, 1907.

de Lury R. E. The introduction by arsenious acid of the reaction between chromic and hydriodic acids. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 54, 1907.

Miller Lash W. On the mechanism of induced reactions. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 9, 1907.

Traube J. Assoziirte Stoffe III. *Chem. Ber.* **40**, pag. 734, 1907.

Bredig G. Ueber Kalkstickstoff I. *ZS. für Elektrochem.* **13**, pag. 69, 1907.

Kling A. La Tautomérie. *Rev. gén. des Scienc.* **18**, pag. 283, 1907.

Rhodin J. G. A. The impedance of solutes in solvents as manifested by osmotic pressure. *Farad. Soc. London.* 10 marzo 1907.

Johnstone S. M. Hydrates in aqueous solutions of electrolytes. *Roy. Soc. Edinb.* 18 marzo 1907.

2. Affinità. Solubilità. Assorbimento. Diffusione. Attrito interno.

Heald W. The Absorption of Hydrogen by Metal Films. *Phys. Rev.* **24**. pag. 269, 1907.

Beck K. und **Ebbinghaus K.** Beiträge zur Bestimmung der inneren Reibung. *Zeit. für phys. Chemie.* **58**, pag. 409, 1907.

Beck K., **Treitschke W.** und **Ebbinghaus K.** Beiträge zur relativen inneren Reibung. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 425, 1907.

Wakelin Barratt J. O. Die Reaktionsgeschwindigkeit zwischen Opsonin und der roten Blutzelle. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 467, 1907.

Swinton C. A. A. The Occlusion of the Residual Gas by the Glass Walls of Vacuum Tubes. *Roy. Soc. Lond.* 28 febr. 1907.

Glaser H. Ueber die innere Reibung zäher und plastisch-fester Körper und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 694, 1907.

Tamman G. Ueber die Beziehung zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen. VII+184 pag. Hamburg. L. Voss, 1907.

Magnusson J. P. Equilibrium between ammonia and hydrogen sulphide. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 21, 1907.

Fawsitt E. C. Die Beziehung des Lösungsdruckes zum Oberflächenzustand bei Metallen. *Journ. Soc. Chem. Ind.* **25**, pag. 3, 1907.

Jänecke E. Ueber eine neue Darstellungsform der van 't Hoffschen Untersuchungen über ozeanische Salzablagerungen. II. *Zeit. f. anorg. Chem.* **52**, pag. 358, 1907.

3. Elettrochimica. Elettrolisi.

Sand H. J. S. The rapid electro-analytical deposition and separation of metals. I. *Proc. chem. Soc.* **23**, pag. 26, 1907.

Colson A. Sur l'ionisation des sulfates chromiques. *Compt. Rend.* **144**, pag. 637, 1907.

Briner A. et **Muller E.** Formation du gaz ammoniac à partir de ses éléments sous l'action de l'étincelle électrique: influence de la pression. *Compt. Rend.* **144**, pag. 694, 1907.

Carrara G. Elettrochimica delle soluzioni non acquose. *Mem. Ac. Lincei* (5), **6**, pag. 268, 1907.

Schoop U. Untersuchungen über Stromverteilung in Akkumulatoren. *Electrician.* **58**, pag. 763, 1907.

Skaupy F. Die Elektrizitätsleitung in verdünnter Lösungen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 560, 1907.

Hantzsch A. und **Caldwell K. S.** Ueber abnorm grosse Jonenbeweglichkeiten. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 575, 1907.

Kohlrausch F. Ueber den Temperaturgang des Leitvermögens einer Lösung. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 630, 1907.

v. **Hasslinger R.** Ueber das Wesen metallischer und elektrolytischer Leitung. *Ak. d. Wiss. Wien.* 10 gen. 1907.

Landolt. Ueber Gewichtsänderungen bei der Elektrolyse einer Cadmium-jodidlösung mit Wechselströmen. *Ak. der. Wiss. Berlin.* 31 gen. 1907.

de Faria O. Transformateur électrolytique des courants alternatifs en courants redressés ondulatoires. *Soc. franç. de Phys.* 18 gen. 1907.

Gagnaux L. Courbes de conductibilité de solutions saturées de chlorure de calcium. *Arch. sc. phys. et nat.* (4), **23**, pag. 214, 1907.

Nutton H. and **Law H. D.** The potential of hydrogen liberated from metallic surfaces. *Farad. Soc. London.* 10 marzo 1907.

Wilsmore N. T. M. and **Johnson F. M. G.** Electrode potentials in liquid Annonia. *Farad. Soc. London.* 10 marzo 1907.

4. Fotochimica.

Orton K. J. P. and **Coates J. E.** Der Einfluss des Lichtes auf Diazoreaktionen. I. *Journ. of Chem. Soc.* 90/91, pag. 35, 1907.

Ciamician G. e **Silber P.** Azioni chimiche della luce. *Gazz. chim. ital.* **37**, pag. 266, 1907.

Dewar J. and **Jones H. O.** On a new Iron Carbonyl and on the action of Light and Heat on the Iron Carbonyls. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 24 gen. 1907.

Rankin G. A. Action of Light on sulphur. *Journ. phys. chem.* **19**, pag. 1, 1907.

5. Termochimica.

Rümelin G. Ueber die Verdünnungswärme Konzentrierter Lösungen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 449, 1907.

Walden P. Ueber organische Lösungs-und Jonisierungsmittel. VI. Lösungswärmen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 479, 1907.

Dixon H. B. and **Bradshaw L.** On the Explosion of Pure Electrolytic Gas. *Roy Soc. Lond.* 31 gen. 1907.

Bradshaw L. The Firing of Gaseous Mixtures by Compression *Roy. Soc. Lond.* 31 gen. 1907.

Maunier J. Détermination des limites d'inflammabilité des mélanges explosifs de vapeurs d'éther et d'air. *Compt. Rend.* **144**, pag. 196, 1907.

6. Struttura. Cristallografia.

Maurain C. La structure cristalline des métaux et des alliages. *La Rev. du Mois.* **3**, N. 1, 1907.

Flamache L. Les formes cristallines de l'eau. *Bull. Soc. Belg. d'Astr.* **12**, N. 1, 1907.

Andrejew J. Die Wachstums-und Auflösungsgeschwindigkeit der Krystalle. *Zeit für Krystall.* **43**, pag. 39, 1907.

Heyn E. und **Bauer O.** Ueber den inneren Aufbau gehärteten und angelassenen Werkzeugstahls. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 49, 1907.

Lehmann O. Flussige und scheinbar lebende Kristalle. *Verh.* 78, *Vers. Ges. D. Naturf. u. Aerzte. Stuttgart.* **1**, pag. 139, 1907.

C. Acustica.

1. Acustica fisica.

Barton E. H. and **Penser J.** Simultaneous Vibration-Curves of String and Bridge photographically obtained from a Monochord. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 446, 1907.

More L. T. and **Fry H. S.** On the Appreciation of Difference of Phase of Sound Waves. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 452, 1907.

Stumpf. Beobachtungen über Kombinationstöne. *Ak. der Wiss. Berlin.* 10 gen. 1907.

2. Acustica musicale.

Gandillot M. Théorie de la musique. *Rev. scient.* (5), **7**, pag. 389-417, 1907.

3. Acustica fisiologica.

4. Apparecchi.

Mc. Allister A. S. Electrical Features of the Cahill Telharmonic System. *Electr. World.* **49**, pag. 22, 1907.

Chassagny. Appareil destiné à l'étude graphique de la composition des vibrations circulaires. *Soc. franc. de Phys.* 15 feb. 1907.

D. Calore.

1. Teoria meccanica del calore.

Happel H. Ueber das Gesetz der korrespondierenden Grenzkurve, insbesondere über das Verhalten zweiatomiger Stoffe. *Phys. Zeit.* 8, pag. 204, 1907.

Dalton J P. On the saturation Constants according to van der Waals Equation. *Phil. Mag.* (6) **13**, pag. 517, 1907.

Adler F. W. Ueber die Formulierung des ersten Hauptsatzes für Gase. *Ann. der Phys.* (4) **22**. pag. 782, 1907.

Rozic J. Beitrag zur Theorie der Lindeschen Luftverdünnungsmaschine. *Ak. d. Wiss. Wien.* 10 gen. 1907.

Keesom W. H. Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. XIII. *Ac. des sciences. Amsterdam.* 26 gen. 1907.

Kamerlingh Onnes H. et **Jolles T. C.** Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. XIV. *Ac. d. sciences. Amsterdam.* 26 gen. 1907.

Van der Waals J. D. A remark on the theory of the ψ surface for binary mixtures. *Proc. Amsterdam.* **9**, pag. 524, 1907.

Van der Waals J. D. Contribution à la théorie des mélanges binaires. *Ac. d. scienc. Amsterdam.* 23 feb. 1907.

Kohnstamm Ph. Sur la forme de la courbe des trois phases solide fluide-gazeuse d'un mélange binaire. *Ac. d. scienc. Amsterdam.* 23 feb. 1907.

Kamerlingh Onnes H. et **Keesom W. H.** Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. XV. *Acad. d. scienc. Amsterdam.* 23 feb. 1907.

2. Teoria cinetica della materia.

Lovory T. M. Osmotic pressure from the stand-point of the kinetic theory. *Proc. Farad. Soc. Lond.* 29 gen. 1907 e *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 552, 1907.

3. Dilatazione e termometria.

Scheel K. Die Fizeau'sche Methode zur Bestimmung der Ausdehnung fester Körper und ihre Anwendung zur Ermittelung anderer physikalischer Konstanten. *Naturw. Rund.* **22**, pag. 157, 1907.

Joli J. Method. of finding the absolute dilatation of mercury. *Dublin Roy. Soc.* 15 gen. 1907.

Henning F. Ueber die Ausdehnung fester Körper bei tiefer Temperatur. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 631, 1907.

Kamerlingh Onnes H. et **Braak C.** La mesure de températures très basses. XIV. *Ac. des sciences. Amsterdam.* 26 gen. 1907.

Smith W. A. Expansion and compressibility of ether and of alkohol in the neighborhood of their boiling points. *Proc. Amer. Acad.* **42**, pag. 419, 1907.

4. Calorimetria.

Bilbrough S. B. Specific Heat of Superheated Steam. *Eng. Rev.* **16**, pag. 104, 1907.

Hopkinson B. A recording Calorimeter for Explosions. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 31 gen. 1907.

Dalton J. P. On the variation of specific Heats with Temperature and Density. *Phil. Mag.* (6). **13**, pag. 525, 1907.

Dalton J. P. On the specific Heat of Saturated Vapours. *Phil. Mag.* (6). **13**, pag. 536, 1907.

Bose E. Resultate kalorimetrische Studien. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 585, 1907.

Gramberg A. Zeichnerische Ermittelung der Strahlungsberichtigung bei Heizwertbestimmungen mit der Bombe. *Zeit. d. Ver. d. Ing.* **51**, pag. 262, 1907

5. Cambiamenti di stato. Proprietà dei vapori e dei gaz.

De Coppet L. C. Recherches sur la surfusion et la saturation. *Ann. de chim. et de phys.* (8), **10**, pag. 557, 1907.

Traube J. Bemerkungen zu der Arbeit der Herren Travers W. und Uster E. J: Ueber das Verhalten gewisser Stoffe bei ihren kritischen Temperaturen. *Zeit. für phys Chem.* **58**, pag. 475, 1907.

Henning F. Ueber den Sättigungsdruck des Wasserdampfes. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 609, 1907.

Schreinemakers F. A. H. Sur un système de quatre composantes à deux phases fluides. *Acad. d. sciences. Amsterdam.* 26 gen. 1907.

Laue A. C. The definition of solid an fluid. *Science.* **25**, pag. 190. 1907.

6. Sorgenti di calore.

7. Conducibilità termica.

Searle G. F. C. A method of determining the thermal conductivity of india-rubber. *Proc. phil. Soc. Cambr.* 28 gen. 1907.

Stekloff W. Sur un problème d'Analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'un barre hétérogène. *Compt. Rend.* **144**, pag. 730, 1907.

8. Calore raggiante.

9. Apparecchi ed applicazioni termiche.

Dugald Clerk. Flame the working Fluid in Gas and Petrol Engines. *Nature.* **75**, pag. 346, 1907.

Döderlein G. Bildliche Darstellung der Arbeitsvorgänge und Zustandsänderungen des Kältemittels in allen Teilen der Kompressionskältemaschine. *Zeit. d. Ver. d. Ing.* **51**, pag. 257, 1907.

Witz A. Canons et moteurs à gaz. *Le Génie civil.* **50**, 16 marzo 1907.

E. Ottica.

1. Teoria. Generalità.

Porter A. B. On the Nature of optical Images. *Phys. Rev.* **24**, pag. 303, 1907.

2. Propagazione della luce, riflessione, rifrazione, dispersione, assorbimento, emissione.

Rudorf G. Die Lichtabsorption in Elektrolyten. *Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron.* **3**, pag. 422, 1907.

Coblentz W. W. Radiation from Selectively Reflecting Bodies. *Phys. Rev.* **24**, pag. 307, 1907.

Hedley E. P. The absorption spectra of benzoic acid, the benzoates and benzamide. *Proc. chem. Soc.* 7 feb. 1907.

Poix M. Théorie du rayonnement des manchons à incandescence. *Compt. Rend.* **144**, pag. 685, 1907.

— Astronomical Refraction. *Nature.* **75**, pag. 538, 1907.

Kynast R. Ueber die bei der Reflexion an isotropen, durchsichtigen Medien anftretenden Phasenverschiebungen. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 726, 1907.

Wood R. W. A Hydraulic Analogy of Radiating Bodies for illustrating the Luminosity of the Welsbach Mantle. *Nature.* **75**, pag. 558, 1907.

Schmidt O. Beiträge zur Spektrochemie des Stickstoffes. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 513, 1907.

Keferstein H. Beiträge zur geometrischen Optick. *Zeit. für phys. Chem. Unt.* **20**, pag. 89, 1907.

3. Spettroscopia.

Crew H. Tatsache und Theorie in der Spektroskopie. *Science.* **25**, pag. 1, 1907.

Ritz W. Sur l'origine des spectres en series. *Compt. Rend.* **144**, pag. 634, 1907.

Conway A. W. Series in spectra. *Proc. Roy. Soc. Dubl.* 19 feb. 1907.

Seipen (von der) **W.** Ueber des Flammenspektrum des Zinns. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 69, 1907.

Hertzsprung E. Zur Strahlung der Sterne II. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**. pag. 86, 1907.

Lunt J. On the two Spectra of the Elements as Evidence of the Composite Nature of the Atoms. *Roy. Soc. Lond.* 31 gen. 1907.

Exner F. Ueber Spektralanalyse. *Lieb. Ann.* **351**, pag. 12, 1907.

Iklé M. Träger und Ursprung des Linien-und Bandenspektrums der Elemente nach den Untersuchungen von J. Stark. *Naturw. Rundsch.* **22**, pag. 93, 105, 117, 1907.

Kleinen. Bequeme Herstellung der Linienspektren von Metallen. *Zeit. für phys. u. Chem. Unt.* **20**, pag. 108, 1907.

Millochau G. Sur la photographie du spectre solaire infra-rouge. *Compt. Rend.* **144**, pag. 725, 1907.

Jones H. C. and **Uhler H. S.** The absorption spectra of certain salts in acqueous solution as affected by the presence of certain other salts with large hydrating power. *Am. Chem. Journ.* **37**, pag. 126, 1907.

Baur E. Kurzer Abriss der Spektroskopie und Colorimetrie. VIII+122 pag. Leipzig, 1907.

Moll W. J. H. An investigation of some ultra-red metallic spectra. *Proc. Amsterdam.* **9**, pag. 544, 1907.

Derichsweiler R. Die Bandenspektren der Kupferhaloide. *Zeit. f. wiss. Phot.* **4**, pag. 401, 1907.

Moll W. J. H. Onderzock van ultra-roode spectra. 81 pag. Dissert. Utrecht, 1907.

v. Bahr E. Die Absorption der Strahlen von Wärmequellen verschiedener Temperatur durch Ozon. *Arkiv. för Mat. Astron. och Fysik.* **3**, N. 15, 1907.

Hartley W. N. and **Hedley E. P.** The Absorption Spectra of Benzoic acid, the Benzoates and Benzamide. *Chem. Soc. Lond.* 7 feb. 1907.

Hartley W. N. and **Hedley E. P.** The Absorption Steotra of Phthalic, Isophthalic and Terephthalic acids, Phthalic Anydride and Phthalimide. *Chem. Soc. Lond.* 7 feb. 1907.

Wood R. W. Anomalous Dispersion and Jonisation. *Nature.* **75**, pag. 583, 1907.

4. Sorgenti luminose. Fotometria.

v. Schrott P. Die Anwendung des Selens zu photometrischen Messungen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 293, 1907.

Dow J. S. Theory of Flicker Photometers. *Electrician.* **58**, pag. 609, 1907.

E. H. Les incohérences de la photométrie. *Industr. électr.* **16**, N. 362, 1907.

Laporte F. et **Jonaust R.** Influence de la température ambiante sur l'intensité lumineuse d'une lampe à incandescence électrique. *Compt. Rend.* **144**, pag. 688, 1907.

Trotter A. P. The theory of flicker photometers. *Electrician.* **58**, pag. 695, 1907.

Harrison H. S. The theory of flicker photometers. *Electrician.* **58**, pag. 732, 1907.

Lauriol P. Photomètre hétérochrome. *L'industrie électrique.* **16**, N. 365, 1907.

5. Luminescenza.

Green A. C. The relation of colour and fluorescence to constitution. *Chem. Soc.* 17 gen. 1907.

Becquerel H. Contribution à l'étude de phosphorescence. *Compt. Rend.* **144**, pag. 671, 1907.

Homer A. A new coloured fluorescent hydrocarbon. *Phil. Soc. Cambr.* 11 marzo 1907.

Stark J. Latente Fluoreszenz und optische Sensibilisation. *Phys. Zeit.* 8, pag. 248, 1907.

Stark J. und **Meyer R.** Beobachtungen über die Fluoreszenz von Benzolderivaten. *Phys. Zeit.* 8, pag. 250, 1907.

6. Fotografia.

Sims W. A. Three Colour Printing Process. *Photograph. Journ.* 47, pag. 4, 1907.

Michaud G. Photographs with Bas-relief Effects. *Scient. Amer.* **96**, pag. 42, 1907.

Emich F. Zur Geschichte des latenten photographischen Bildes. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 107, 1907.

Derr L. Photography for Students of Physics and Chemistry. London, 1907.

7. Interferenza. Diffrazione.

Meslin G. Sur les cannelures supplémentaires des spectres produits par les réseaux parallèles. *Compt. Rend.* **144**, pag. 689, 1907.

Giesing E. Berichtigung zu meiner Abhandlung: Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 798, 1908.

8. Ottica dei cristalli, birifrangenza, polarizzazione.

9. Rotazione del piano di polarizzazione.

Mathewson W. E. La rotation optique de la gliadine dans certains solvents organiques. *Chem. New.* **95**, N. 2459, 1907.

Stewart A. W. The relation between absorption spectra and optical rotatory power. I. *Chem. Soc.* 17 gen. 1907.

Buckney F. An optically active tetrahydroquinoline compound. *Phil. Soc. Cambr.* 11 marzo 1907.

Patterson T. S. and **Kage J.** Studies in optical superposition. *Lond. Chem. Soc.* 21 marzo 1907.

Von **Halban H.** Bemerkung zu der Abhandlung von E. Wedekind: Die Geschwindigkeit der Autoracemisierung von optisch aktiven Ammoniumsalzen. *Zeit. für Elektrochemie.* **13**, pag. 57, 1907.

Wedekind E. Ueber die Autoracemisierung von optisch aktiven Ammoniumsalzen (Anmerkung zu der vorstehenden Arbeit von H. v. Halban). *Zeit. für Elektrochemie.* **13**. pag. 58, 1907.

Stewart A. W. The Relation between Absorption Spectra and Optical Rotatory Power I. *Chem. Soc. Lond.* 17 gen. 1907.

10. Ottica fisiologica.

Hérmardinquer C. La persistance des impressions lumineuses sur la rétine et le cinématographe. *Rev. Scient.* (5), **7**, pag. 463.

11. Apparecchi.

Twyman F. Recent improvements in spectrophotometers. *Lond. Phys. Soc.* 25 gen. 1907 e *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 481, 1907.

Smith H. A new model of crystal refractometer. *Lond. Miner. Soc.* 29 gen. 1907.

Lummer O. und **Kynast R.** Spektralapparat für Polarisation-und Phasendifferenzmessungen. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 721, 1907.

Hartl H. Kleiner Apparat für Oberflächenfarben. *Zeit. für phys. und chem. Unt.* **20**, pag. 133, 1907.

F. Magnetismo.

1. Generalità. Teoria.

Russner J. Ueber einen Apparat zum Beweis des Coulomb'schen magnetischen Gesetzes. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* **20**, pag. 96, 1907.

Schmidt A. Ueber die Bestimmung des allgemeinen Potentials beliebiger Magnete und die darauf begründete Berechnung ihrer gegenseitigen Einwirkung *Akad. d. wiss. Berlin*, 21 marzo 1907.

Müllendorff E. Erfahrungsformel für die Hysterese-kurve. *Elektr. Zeit.* 28, pag. 361, 1907.

2. Misure. Apparecchi.

Armagnat H. Mesure de l'induction magnétique dans le champs de 100 à 1000 Gauss. *Rev. électr.* **7**, N. 76, 1907.

Mc Lennan J. C. and **Wright C. S.** On the susceptibility of mixtures of Salt Solutions. *Phys. Rev.* **24**, pag. 276, 1907.

Searle G. F. C. An experiment with a pair of Robison ball-ended magnets. *Proc. Phil. Soc. Cambridge.* 28 genn. 1907.

Kunz J. Les propriétés magnétiques de l'hématite. *Arch. sc. phys. et mat.* (4), **23**, pag. 137, 1907.

G. Elettricità.

1. Teoria.

De la Rive L. Sur l'évaluation de la force dan le champ électromagnétique de l'électron. *Compt. Rend. de la Soc. de Phys. de Gen.* 3 gen. 1907.

Pellat H. Sur la constitution de l'atome et la loi de Coulomb. *Compt. Rend.* **144**, 1907.

Tommasina T. Quelques observations à propos de la Note de M. H. Pellat sur la constitution de l'atome. *Compt. Rend.* **144**, pag. 746, 1907.

Righi A. La moderna teoria dei fenomeni fisici. XI+290 pag. Bologna, N. Zanichelli, 1907.

Lodge O. Electrons: or, the Nature and Properties of Negative Electricity. 246 pag. London. Bell. 1907.

Bucherer A. H. Les potentiels retardés transformés. *Arch. sc. phys. et nat.* (4), **23**, pag. 129, 1907.

Sagnac G. Sur une interprétation diélectrique de la formule optique de Newton. *Journ. de phys.* (4), **6**, pag. 277, 1907.

Wolfke M. L'électron considéré comme un centre des pressions dans l'éther. *Éclair. électr.* **51**, pag. 73, 1907.

Florey. Les théories modernes sur la constitution de la matière. *Verein der Deutschen Ingenieure* 1907. (*Éclair. électr.* **51**, pag. 55, 95, 1907).

2. Elettrostatica. Macchine elettriche.

Trouton F. T. and **Russ G.** The rate of recovery of residual charge in electric condensers. *Proc. Phys. Soc. Lond.* 8 marzo 1907.

Joung F. B. On the relation of the Field at the Point of an Electrified Needle to the mechanical Force resulting. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 542, 1907.

Sagnac G. Sur la théorie des diélectriques et la formule de Clausius. *Journ. de phys.* (4), **6**, pag. 273

3. Scariche elettriche attraverso conduttori e dielettrici.

Burstyn W. Durchschlagsfestigkeit von Isolierstoffen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 305, 1907.

Hemsalech G. A. Sur la rôle et la nature de la décharge initiale dans l'étincelle électrique. *Compt. Rend.* **144**, pag. 692, 1907.

Fisher H. W. Spark potentials in liquid dielectrics. *Electrician.* **58**, pag. 773, 1907.

4. Sorgenti di elettricità. Polarizzazione.

Wolff F. A. and **Waters C. E.** Standard Cells. *Electr. World.* **49**, pag. 100, 1907.

Juman L. Recherches récentes sur l'accumulateur alcalin fer-nickel. *La Rev. électr.* 7, N. 74, 1907.

— Perfectionnements récents concernant les éléments galvaniques. *Centralbl. für Accum.* gen. feb. marzo 1907. (*Écl. électr.* **51**, pag. 71, 1907).

5. Conducibilità. Resistenza.

Block W. Studien über die Methoden zur Bestimmung des innern Widerstandes stromliefernder galvanischer Elemente. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 442, 1907,

Bädeker K. Ueber die elektrische Leitfähigkeit und die thermoelektrische Kraft einiger Schwermetallverbindungen. *Ann. der Phys.* (4), 22, pag. 749, 1907.

Crocker F. B. Sur les variations de résistance du cuivre avec la température. *Elect. World.* 23 feb. 1907. (*Écl. électr.* **51**, pag. 63, 1907).

Jaeger F. M. Sur l'influence de la lumière sur la conductibilité électrique de l'antimoine japonais. *Ac. d. scienc. Amsterdam.* 23 feb. 1907.

Koenigsberger J. Ueber das Verhältnis der Wärmeleitung zur Elektrizitätsleitung. *Phys. Zeit.* 8, pag. 237, 1907.

Schenck R. Die elektrische Leitfähigkeit der Legierungen und die Elektronentheorie. *Phys. Zeit.* 8, pag. 239, 1907.

Jégon P. Essai de théorie sur les radio-conducteurs. *Écl. électr.* 51, pag. 82, 1907.

Thomson J. J. La théorie moderne de la conductibilité électrique des metaux. *Electrical Engineering,* 28 feb. 1907. (*Écl. électr.* **51**, pag. 21, 94, 1907).

Donaldson J. A. and **Wilson R.** Note on the change produced in the conductivity and density of lead wires by permanent stretching. *Roy. Soc. Edinb.* 4 marzo 1907.

6. Fenomeni termici.

7. Fenomeni luminosi.

Aston F. W. Experiments on the Lenght of the katode Dark Space with Varying Current Densities and Pressures in Different Gases. *Proc. Roy. Soc.* 1 gen. 1907.

Villard P. Sur la lumière positive. *Compt. Rend.* **144**, pag. 749, 1907.

8. Elettromagnetismo, para e diamagnetismo.

Bucherer A. H. On a new Principle of Relativity in Electromagnetism. *Phil. Mag* (6), **13**, pag. 413, 1907.

Zahn H. und **Schmidt H.** Ueber Halleffekt und verwandte Erscheinungen bei einigen Heuslerschen Legierungen. *Verh. d. Deut. phys. Ges.* 5, pag. 98, 1907.

9. Elettrodinamica e induzione.

Makower A. J. Measurement of Phase-differences. *Electrician.* 58, pag. 695, 1907.

Russel A. The magnetic field and inductance coefficients of circular, cylindrical and helical currents. *Proc. Phys. Soc.* 8 feb. 1907, e *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 420, 1907.

Helmholtz H. Vorlesungen über Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus. Leipzig. A. Barth. 1907.

Bary P. Actions mécaniques du courant dans les conducteurs électriques. *Éclair électr.* **51**, pag. 37, 1907.

Wittek W. Selbstinduktion einer rechtectigen Spule. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 209, 1907.

10. Oscillazioni elettriche.

Nesper E. Beiträge zur Erzeugung schwach gedämpfter Schwingungen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 304, 1907.

Burstyn W. Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 305, 1907.

Fessenden R. A. The continuous Production of High frequency Oscillations, *Electrician.* **58**, pag. 675-710, 1907.

Reithoffer M. Zur Erklärung der ungedämpften Schwingungen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 308, 1908.

Brandes H. Ueber die Dämpfung und Energieausnutzung einiger Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 640, 1907.

Conrat F. Ueber Messung des Strahlungsdekrementes stabförmiger Leiter. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 659, 1907.

Hahnemann W. Zur Erklärung der sogenannten ungedämpften Schwingungen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 353, 1907.

Hemsalech G. A. Sur les oscillations d'ordre supérieur (harmoniques) dans l'étincelle électrique. *Compt. Rend.* **144**. pag. 741, 1907.

Weber E. L. Étude dur les décharges oscillantes de grande fréquence au moyen du tube de Braun. *Electr. World.* 9 marzo 1907. (*Éclair électr.* **51**, pag. 103, 1907).

11. Magneto-ed elettro-ottica.

Becquerel J. Théorie des phénomènes magnéto-optiques dans les cristaux. *Radium.* **4**, pag. 107, 1907.

Wood R. W. Analyse de la fluorescence et du pouvoir rotatoire magnétique de la vapeur de sodium. *Radium.* **4**, pag. 118, 1907.

Becquerel J. Sur la polarisation rotatoire magnétique aux environs des bandes d'absorption. Pouvoir rotatoire magnetique des

cristaux à la température de l'air liquide. *Compt. Rend.* **144**, pag. 682, 1907.

Page W. M. The variation of the absorption bands of a chrystal in a magnetic field. *Phil. Soc. Cambr.* 11 marzo 1907.

Runge C. Ueber die Zerlegung von Spektrallinien im magnetischen Felde. *Phys. Zeit.* 8, pag. 232, 1907.

Jaumann G. Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern. *Akad. der Wiss. Wien.* 28 feb. 1907.

12. Raggi Catodici, Röntgen, ecc.

Crookes W. Experiments on the Dark Space in Vacuum Tubes. *Roy. Soc. Lond.* 24 gen. 1907.

Wien W. Ueber die Berechnung der Impulsbreite der Röntgenstrahlen aus ihrer Energie. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 793, 1907.

Sterba J. Ueber chemische Einwirkung der Kathodenstrahlen. *Ak. der Wiss. Wien.* 14 feb. 1907.

Swinton A. A. Positive streams in Crookes Tubes. *Nature*, **75**, pag. 583, 1907.

Siegl K. Untersuchungen der Kanalstrahlen von Sauerstoff. *Akad. der Wiss. Wien.* 28 feb. 1907.

13. Radioattività e ionizzazione.

Nasini R., Anderlini F., e Levi M. G. Sulla radioattività dei soffioni boraciferi della Toscana e sulla quantità di emanazione in essi contenuta. *Gazz. chim. ital.* **37**, pag. 218, 1907.

Nasini R. e Levi M. G. Radioattività di alcuni prodotti vulcanici dell'ultima eruzione del Vesuvio (aprile 1906) e confronto con quella di materiali più antichi. *Gazz. chim. ital.* **37**, pag. 226, 1907.

Wilde H. Radium and the Properties of its Combinations. *Manch. Phil. Soc.* **51**, pag. 1, 1907.

Bragg W. A. Ionisation of gases by a-particles of radium. *Proc. Phys. Soc. Lond.* 22 feb. 1907.

Boltwood B. B. Sur les derniers produits de décomposition des éléments radioactifs. *Radium.* **4**, pag. 97, 1907.

Dobler P. Sur le rayonnement secondaire qui prend naissance lorsque les rayons β du radium viennent frapper les lames métalliques minces. *Radium.* **4**, pag. 103, 1907.

Bragg W. A. The influence of the velocity of the α-Particle upon the Stopping Power of the Substance through which it passes. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 507, 1907.

Horton F. On the Discharge of Negative Electricity from Hot Calcium. *Roy. Soc. Lond.* 31 gen. 1907.

Righi A. Les transformations atomique des corps radioactifs. *Arch. de Gen.* (4), **23**, pag. 247, 1907.

Eve A. S. Jonisation by Sprayng. *Nature.* **75**, pag. 533, 1907.

Barlow W. S. L. Retardation of Electroscopic Leak by means of recognised Radio-active Substances. *Nature.* **75**, pag. 559, 1907.

Meyer St. und v. **Schweidler.** Bericht über die Endglieder der Radiumszerfallsreihe (Radioblei). *Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron.* **3**, pag. 381, 1907.

Hess V. F. Ueber das Uran X und die Absorption seiner α-Strahlen. *Ak. d. Wiss. Wien.* 10 gen. 1907.

Raveau C. Recherches récentes sur la transformation des corps radioactifs. *Soc. franc. de Phys.* 1 marzo 1907.

Blanc A. Action du champ magnétique sur l'air ionisé en mouvement. *Compt. Rend.* **144**, pag. 739, 1907.

Amaduzzi L. La jonizzazione e la convezione elettrica nei gas. 386 pag. Bologna, N. Zanichelli, 1907.

Meyer S. und von **Schweidler E.** Ueber ein radioaktives Produkt aus dem Aktinium. *Akad. der Wiss. Wien.* 28 feb. 1907.

Varley W. M. and **Unwin F.** The influence of temperature on the photoelectric discharge from platinum. *Roy. Soc. Edimb.* 18 marzo 1907.

14. Elettrotecnica. Telefonia e Telegrafia.

Fessenden. Drahtloses Fernsprechen. *Elektr. und Maschinenbau.* **25**, pag. 183, 1907.

Uller K. Zur Deutung der Wirkungsweise des richtenden Marconi-Senders. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 193, 1907.

Korn A. Ueber neue Methoden der Telautographie. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 198, 1907.

Déguisne C. und **Marbe K.** Analogie zwischen Wechselströmen und Schallschwingungen. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 200, 1907.

Field S. D. Field's New System of Telegraphy. *Electr. Rev.* **50**, pag. 45, 1907.

Cotton A. La téléphotographie et les expériences de M. Korn. *La Rev. du Mois.* **3**, N. 1, 1907.

Lyle T. R. Transformer indicator diagrams. *Proc. Phys. Soc. Lond.* 22 feb. 1907, e *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 468, 1907.

Lichtenstein L. Zur Theorie der Wechselstromverzweigung. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 115, 1907.

Koffmann R. Die Funckenspruchstation in Nauen. *Him. und Erde.* **19**, pag. 211, 1907.

Winkelmann R. Transformatoren und Asynchronmotoren. X+136 pag. Hannover. M. Jänecke, 1907.

Hiecke R. Ueber Schwingungen mit hoher Spannung und Frequenz in Gleichstrom-Netzen. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 334, 1907.

Weidhaas G. Einfache Versuche zur Demonstration der Lichttelephonie. *Zeit. für phys. chem. Unt.* **20**, pag. 93, 1907.

Tissot C. Réalisation de la syntonie par l'emploi des détecteurs bolométriques. *Soc. franc. de Phys.* 18 gen. 1907. *Journ. de Phys.* (4). **6**, pag. 279, 1907.

Armagnat H. Inflammation électrique des moteurs à explosion. *Rev. électr.* **7**, N. 75, 1907.

Fleming J. A. The principles of electric-wave telegraphy. *Electrician.* **58**, pag. 732, 1907.

Armagnat H La téléphotographie. *Rev. électr.* **7**, N. 77, 1907.

Escard J. La prèparation électrothermique des composés chimiques industriels. *Rev. électr.* **7**, N. 77, 1907.

Fessenden P. A. La Téléphonie sans fil. *Electr. Review.* 1907. (*Éclair. électr.* **51**, pag. 65, 104, 1907).

15. Unità.

16. Misure. Apparecchi.

Wertheim Salomonson J. K. A. Ein neues Galvanometer. *Phys. Zeit.* 8, pag. 195, 1907.

Tellier H. Emploi et application de l'èlectrodynamomètre différentiel de Potier à la mesure des puissances en courant alternatif. *Indust. électr.* **16**, N. 362, 1907.

Zeleny A. Modifications of the Maxwell-Rayleigh and the Anderson Methods for the Measurement of the coefficient of Selfinduction. *Phys. Rev.* **24**, pag. 257, 1907.

Johnson T. Electrical seed testing. *Proc. Roy. Soc. Dublin.* 19 feb. 1907.

J. L. M. Standards and exact Measurement. *Nature.* **75**, pag. 570, 1907.

Kolbe B. Ueber Schul-Messbrücken. *Zeit. für phys. u. chem. Unt.* **20**, pag. 78, 1907.

Busch. Das Verbesserte Gabelelektroskop. *Zeit. für phys. u chem. Unt.* **20**, pag. 105, 1907.

Bernard L. Anordnung von Vorratsgefäsen für Flüssigkeitswiderstände. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 150, 1907.

Roller F. W. Electric and magnetic Measurement. London, Spon. 1907.

F. L. Sur l'emploi des fils d'aluminium mis dans la construction des appareils. *Industr. électr.* **16**, N. 365, 1907.

Dieterici C. Ein elektromagnetischer Rotationsapparat. *Phys. Zeit.* 8, pag. 244, 1907.

Wulf T. Ein neues Elektrometer für statische Ladungen *Phys. Zeit.* 8, pag. 246, 1907.

Berlemont G. Sur un nouveau procédé de réglage des tubes à rayons X. *Compt. Rend.* **144**, pag. 795, 1907.

H. Fisica terrestre e Meteorologia.

1. Generalità. Teorie.

v. Bezold W. Gesammelte Abhandlungen aus den gebieten der Meteorologie und des Erdmagnetismus. VIII+448. F. Vieweg und Sohn. Braunschweig.

Joly J. Radium and Geology. *Dublin Roy. Soc.* 15 gen. 1907.

Inwards R. The metric system in meteorology. *Proc. Roy. Met. Soc. Lond.* 20 feb. 1907.

De Marchi L. Teoria elastica delle dislocazioni tectoniche. *Rend. Acc. Lincei.* (5) **16**, pag. 384, 1907

Grossmann E. Zu dem Problem der Polhöhenschwankung. *Astr. Nachr.* **174**, pag. 98, 1907.

Snyder C. The World Machine. The First Phase, the Cosmic Mechanism: pag. XVI+488. London. Longmans, Green and Co. 1907.

Krebs H. Was ist morgen für Wetter? Berlin. S. Mode, 1907.

Schoen J. G. Anleitung für die Manipulationem bei den barometrischen Höhenmessungen. Wien. Fr. Deutike, 1907.

2. Geodesia. Misure geodetiche e di gravità.

Pizzetti P. Sulla questione della lunghezza più conveniente dei lati nelle triangolazioni geodetiche. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* **23**, N. 1, 1907.

Kühnen F. und **Furtwängler P.** Bestimmung der absoluten Grösse der Schwerkraft zu Potsdam mit Reversionspendeln. *Naturw. Rund.* **22**. pag. 187, 1907.

Bourgeois et **Noirel.** Sur la forme du géoide dans la région du Sahel d'Alger. *Compt. Rend.* **144**, pag. 792, 1907.

3. Magnetismo terrestre. Correnti telluriche. Luce polare.

Kesslitz W. Magnetische Störung in Polė am 9 und 10 februar 1907. *Met. Zeit.* **24**, pag. 129, 1907.

Arendt Th. Nordlicht. *Met. Zeit.* **24**, pag. 130, 1907.

Schmidt A. Vorläufige Mitteilung über magnetische Variationsbeobachtungen in einem Bergwerk. *Met. Zeit.* **24**, pag. 130, 1907.

— Deklinationsbeobachtungen im Berwerke Pribram in 1000 m. Tiefe. *Met. Zeit.* **24**, 1907.

4. Studio dell'alta atmosfera.

De Fonvielle W. Inauguration du nouveau réseau d'observatoires de la haute atmosphère. *Cosmos.* **56**, N. 1146, 1907.

Vincent J. Le lancer de ballon-sondes du 8 novembre 1906. *Ciel et Terre.* **27**, N. 21, 1907.

Hooremann F. Le lancer de ballons-sondes du 14 janvier 1907. *Ciel et Terre.* **27**, N. 23, 1907.

— Mesures de la hauteur des nuages à l'aide d'un réflecteur. *Revue néphol.* N. 13, 1907.

Bracke A. Formation symetrique de cirrus convergents. *Revue néphol.* N. 13, 1907.

Alippi T. Nuages irisés. *Revue néphol.* N. 14, 1907.

Bracke A. La fréquence des cirrus et la pression au Caire. *Revue néphol.* N. 14, 1907.

Baden Powell B. F. S. The exploration of the air. *Roy. Met. Soc. Lond.* 20 marzo 1907.

— The Belgian international Balloon Service. *Nature* **75**, pag. 572, 1907.

Köppen W. Bemerkenswerte Drachenaufstiege in Grosborsted im November 1907. *Ann. d. Hydr.* **35**. 2 pag. 64, 1907.

— Die Temperatur der oberen Luftschichten im Dezember 1906. *Wetter.* **14**, pag. 1, 1907.

5. Meccanica e termodinamica dell'atmosfera. Venti.

Krebs W. Amospheric See-Saw Phenomenon and the Occurrence of Typhoon Storms. *Nature.* **75**, pag. 560, 1907.

Teisserenc de Bort L. et **Rotch L.** Caractéres de la circulation atmospherique intertropicale. *Compt. Rend.* **144**, pag. 772, 1907.

Kaiser M. Historische Entwickelung unserer Kemtniss der Land- und Seewinde auf der Erde und Darstellung der gegenwärtigen Theorien. *Wetter.* **24**, 1, pag. 1, 1907.

Mac Lear P. J. The Guildford Storm of August. 2, 1906. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 41, 1907.

Van Wlijk-Jurrcaanse A. Die Hongkong-typhoon van 18 september 1906. *De Zee.* N. 1, 1907.

Wellington. New Zealand and Wind. *Quart. Journ.* **33,** (4), pag. 70, 1907.

Blachburn J. A. P. The storm areas of the globe. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 57, 1907.

Van der Stok J. P. Sur le traitement des observations du vent. *Acad. de scienc. Amsterdam.* 23 feb. 1907.

6. Ottica dell'atmosfera.

— Quelques remarques sur des halos observés en 1905 en Europe occidentale. *Revue néphol.* N. 14, 1907.

Reimann E. Weisser Nebelbogen. *Met. Zeit.* **24**, pag. 119, 1907.

Exner K. Farbe und Polarisation des Himmelslichtes. *Met. Zeit.* **24**, pag. 139, 1907.

Janezic E. Halo bzw. Kreuz. *Met. Zeit.* **24**, pag. 139, 1907.

Pernter J. M. Zur Theorie der schönsten der Haloerscheinungen. *Ak. d. Wiss. Wien.* 10 gen. 1907.

Van de Sande Bakhuyzen H. G. La réfraction astronomique d'après une distribution atmosphèrique de la température déduite à l'aide d'ascension en ballon. *Ac. des sciences. Amsterdam.* 26 gen. 1907.

7. Elettricità atmosferica.

— Mesures du potential électrique de l'atmosfere à Kew. *Revue néphol.* N. 13, 1907.

Moullin M. Sur les égaliseurs de potentiel. *Soc. franc. de phys.* 15 feb. 1907.

Mac Lear J. P. Beech trees and Lightning. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 66, 1907.

Naegler W. St. Elmsfeuer? *Wetter.* **24**, 1, pag. 23, 1907.

8. Temperatura del suolo.

9. Terremoti e vulcani.

Oddone E. Sur quelques constantes sismiques déduites du tremblement de terre du 2 avril 1904. *Compt. Rend.* **144**, pag. 662, 1907.

Oddone E. Sur quelques constantes sismiques déduites du tremblement de terre du 4 avril 1904. *Compt. Rend.* **144**, pag. 722, 1907.

Pickering W. H. The place of origin of the Moon. The volcanic problem. *The Journ. of Geology.* XV, N. 1, 1907.

W. K. Neueste Augenzeugnisse und uralte Ereignisse vulkanischer Art. *Hinmel u. Erde.* **19**, 5, pag. 233, 1907.

Krebs W. Fernbestimmung und Voraussage von Erdkatastrophen. *Weltall.* **7**, 9, pag. 133, 1907.

— The Study of Earthquakes. *Nature.* **75**, pag. 586. 1907.

See T. J. J. The cause of earthquakes, mountain formation and kindred phenomena connected with the physics of the Earth. *Proc. of the Amer. phil. Soc.* **45**, 1907.

— The Mexican Earthquake. *Nature.* **75**, pag. 610, 1907.

10. Climatologia.

Ward R. Les changement de climat. *Ciel et Terre.* **27**, N. 22, 1907.

Mawley E. Report on the phenological observations made during 1906 by observers in various part of the Britisch Isles. *Proc. Roy. Met. Soc. Lond.* 20 feb. 1907.

Pernter J. M. Das Ende des Wetterschiessens. *Met. Zeit.* **24**, pag. 114, 1907.

— Experimente über das Eindringen des Regenwassers in den Boden in Indien. *Met. Zeit.* **24**, pag. 119, 1907.

J. H. Das ausserordentliche Barometermaximum. *Met. Zeit.* **24**, pag. 121, 1907.

Woeikof A. Das Barometermaximum im Januar 1907. *Met. Zeit.* **24**, pag. 120, 1907.

F. M. E. Ueber die Theorie der Guilbertschen Regeln der Wettervohersage von B. Brunhes. *Met. Zeit.* **24**, pag. 121, 1907.

J. H. Neue japanische meteorologische Stationen an den Küsten des Gelben Meeres und in der Mandschurei *Met. Zeit.* **24**, pag. 124, 1907.

Lockyer W. J. S. Ueber langperiodische Barometerschwankungen. *Met. Zeit.* **24**, pag. 131, 1907.

Hann J. Ueber den täglichen Gang der Temperatur in der äusseren Tropenzone. *Met. Zeit.* **24**, pag. 135, 1907.

Hann J. Luftdruck und Windstärke im indischen Monsungebiet. *Met. Zeit.* **24**, pag. 136, 1907.

Köppen W. Klassification der Klimate. *Met. Zeit.* **24**, pag. 140, 1907.

Hann J. Temperatur von Bombay und Kalkutta. *Met. Zeit.* **24**, pag. 142, 1907.

— Auserordentlicher Regenfall am 2 juni 1903 in der Provinz. Rheinland. *Met. Zeit.* **24**, pag. 143, 1907.

— Ein neues Beobachtungsnetz im Staate Yukatan. Mexico. *Met. Zeit.* pag. 143, 1907.

Arendt Th. Ueber die Gewitterverhältnisse an der deutschen Nordsee, und Ostseeküste. *Ann. d. Hydrog u. marit. Meteor.* pag. 69, 1907.

Fitzner R. Die Regenverteilung in den Deutschen Kolonien. 117 pag. Berlin. H. Paetel, 1907.

Klein. Die Wahrheit über den Stand des Wetterprognoserwesens. *Gaea.* H. 3, 1907.

Rudel. Die Witterung Nürnbergs im Jahre 1906. Nürnberg. 1907.

Marriott W. The abnormal wheather of the past summer und some of its effetc. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 5, 1907.

Diesner B. Die beiden Oktobermonate 1905 und 1906. *Welter.* **24**, 1, pag. 21, 1907.

Naegler W. Wie ist es zu erklären, dass am 22 und 23 Januar. d. J. trotz hoher Barometerstandes, über Zentraleuropa fast allenthalben bedeckter Himmel herrschte und sogar leichte. Regenfälle zu verzeichnen waren? *Wetter.* **24**. 1. pag. 23, 1907.

— Ungewöhnliche Witterungsverhältnisse zu Singapore im Jahre 1905. *Ann. d. Hydr.* **35**, 2, 88, 1907.

— Blue Hill meteorological Observatory. Mass. U. S. A. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 66, 1907.

— Uebersicht über die Witterung in Zentraleuropa im November 1906. *Wetter.* **24**, 1, pag. 16. 1907.

Henze R. Die Temperaturverhältnisse im November 1906 unter 50° nördl. Breite. *Wetter.* **24**, 1, pag. 17. 1907.

— An Indian rainfall and its results. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 70, 1907.

— Effect of drought in 1906. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 70, 1907.

— Neige tombant de balles d'alto-cumulus. *Rev. népholog.* **13**, pag. 103, 1907.

— Destructive hailstorm in Bedfordshire. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 60, 1907.

— Hailstorm at Lewisham. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 65, 1907.

Landis D. E. The structure of hailstones. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 63, 1907.

Prager M. Eine Vorhersage der Regenfälle in Indien für das Jahr. 1906. *Wetter.* 1, pag. 11, 1907.

11. Radiazione Solare.

Bemporad A. e **Cavasino A.** Misure attinometriche eseguite nel R. Osservatorio di Catania. *Mem. d. Soc. d. Spettroscop. Ital.* **36**, 1907.

Millocan G. Recherches sur la température effective du Soleil. *Soc. franc. de Phys.* 18 gen. 1907.

Hopfner F. Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absortion der Wärmestrahlen durch die atmosphärische Luft nach dem Lambertschen Gesetz. *Ak. der Wiss. Wien.* 7 feb. 1907.

12. Apparecchi.

Fergusson S. P. Errors of Absorption hygrometers. *Quart. Journ.* **33**, 141, pag. 67, 1907.

Knott G. G. The dynamical theory of seismometers. *Roy. Soc. Edimb.* 4 marzo 1907.

L. Storia della fisica.

Errera C. Sulla scoperta della declinazione magnetica e sulla storia della bussola nautica nei secoli XV-XVII. *Riv. d. Fis. e Mat.* 8, 1907.

Ross J. Galileo in the Val d'Arno. *Monthley Review.* Aprile, 1907.

Hoppe E. Zum Gedächtniss Leonhard Eulers. *Phys. Zeit.* 8, pag. 225, 1907.

M. Trattati.

Faivre-Dupaigre J. et **Carimey E.** Cours élémentaire de physique rédigé conformément au plan d'études du 31 mai 1902. pag. XIV+443. Paris, Masson et C.ie, 1907.

Hartwig Thdr. J. Einführung in die praktische Physik in gemeinverständlicher Darstellung II. 187 pag. Stuttgart. E. H. Moritz. 1907.

Strecker K. Hilfsbuch für die Elektrotechnik. XII+966. pag. Berlin. J. Springer, 1907.

Béthoux V. et Loffon J. Physique. 5 éd. Paris. Belin frères, 1907.

Corbin E. H. und **Stewart A. M.** A Handbook of Physics and Chemistry. London, J. A. Churchill, 1907.

Sattler A. Leitfaden der Physik und Chemie mit Berücksichtigung der Mineralogie und der Lehre vom Menschen. X+255 pag. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. 1907.

Cheston C. Theoretical and Descriptive Physics. London. Harrap. 1907.

Poynting J. H. and **Thompson J. J.** Textbook of Physics; Properties of Matter. London. Griffin, 1907.

A. Pochettino.

NOTIZIARIO

— La Royal Institution ha conferito alla S.ra Curie il premio Acton di L. st. 100 pel suo libro: Recherches sur les substances radioactives.

— Il sig. Le Chatelier è stato eletto membro dell'Accademia delle Scienze di Parigi al posto del defunto Prof. Moissan.

— Il noto geologo, De Lapparent, è stato eletto segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

— I premi Smith sono stati dall'Università di Cambridge, assegnati ai seguenti lavori: *Fluorescenza* di G. R. Blanco-White — *I moti sistematici delle stelle* di A. G. Eddington — *L'incurvamento delle onde intorno ad una larga sfera opaca, ed alcuni problemi annessi* di Y. W. Nicholson — *La variazione delle bande d'assorbimento nello spettro d'un cristallo sotto l'azione di un campo magnetico* di W. M. Page.

— Sir James Dewar è stato nominato membro corrispondente dell'Accademia Reale delle Scienze di Danimarca.

— Il premio Adams (1907) di Cambridge è stato conferito al sig. Brown per il suo studio sulle irregolarità del moto della luna dovute all'azione diretta dei pianeti.

— Il sig. E. L. Nichols è stato nominato presidente della American Physical Society pel 1907.

— Il sig. R. Weber è nominato Professore straordinario di fisica a Heidelberg.

— L'illustre matematico Prof. H. Poincaré è stato nominato membro del Consiglio Superiore di Belle Arti di Parigi in sostituzione di Berthelot.

— Il sig. Mascart è nominato membro del Consiglio del « Bureau Central Météorologique » in sostituzione del defunto Prof. Berthelot.

— Si annunzia da Manchester che la cattedra di fisica matematica fondata dal Prof. Schuster allo scopo di promuo-

vere delle ricerche in questo ramo di scienze, verrà occupata dal Prof. H. Bateman.

— Il Prof. Darboux è stato nominato membro dell'Ufficio nazionale scientifico permanente di pesi e misure al posto di Berthelot.

— A. Witz è stato nominato membro corrispondente (sezione Meccanica) dell'Accademia di Parigi.

— Il noto costruttore di apparecchi Carpentier è stato eletto accademico libero al posto del colonnello Laussedat.

— Si annunzia da Monaco la morte del noto elettrotecnico F. Uppenhorn autore di varie opere pregiate ed organizzatore dell'impianto elettrico di Monaco, che trasporta l'energia da Moosburg alla distanza di 60 kilometri.

— Il 90° Congresso della « Société Helvétique des Sciences Naturelles » avrà luogo a Friburgo dal 28 al 31 luglio.

— Nel 1907 si festeggia il 3° centenario della fondazione dell'Università di Giessen e il quattrocento cinquantesimo anniversario della fondazione dell'Università di Friburgo (Svizzera).

— Nel 1909 l'Università di Ginevra celebrerà il trecento e cinquantesimo anniversario della sua fondazione e saranno invitati dei rappresentanti delle Università straniere.

— L'Istituto di Francia ha assegnato L. 12.000 per gli stabilimenti sismologici e L. 5000 pel catalogo provvisorio delle opere complete di Leibnitz.

— Il 20 maggio ha avuto luogo a Meudon una adunanza della Unione Internazionale per la cooperazione nelle Ricerche Solari.

— Il Bollettino del « Manila Weather Bureau » (agosto 1906) contiene la riproduzione del sismogramma *completo* del terremoto di Valparaiso ottenuto con un microsismografo Vicentini a pendolo verticale di m. 1,5 di lunghezza.

— Si va formando una vera e propria industria del quarzo fuso. Vengono infatti fabbricati ormai molti oggetti per uso di laboratorio con quarzo fuso nel forno elettrico. Per dare una idea dei prezzi di tale materiale basta dire che il tubo di 3 mm. di diametro interno si vende a 5 lire al metro.

— Nel mondo aeronautico fervono vive polemiche per decidere sulla esistenza reale degli aeroplani dei fratelli Wright.

— È uscito l'importante Atlante di fotografie solari eseguite nell'osservatorio astronomico di Meudon.

— Avendo il sig. J. D. Hooker di Los Angeles donato alla « Carnegie Institution » una somma di 45.000 dollari allo scopo di far costruire per l'osservatorio astronomico di Mount Wilson uno specchio di m. 2,54 di apertura e di m. 15,24 di lunghezza focale, la vetreria di St. Gobain si è impegnata a fornire una piastra di vetro di m. 0,33 di spessore. Tale blocco di vetro peserà circa 4500 chili.

Si spera di poter eseguire col nuovo specchio notevoli ricerche di astrofisica, prestandosi esso ad esempio mirabilmente all'osservazione degli spettri stellari deboli.

— Il sig. Lindemann annunzia di aver scoperto un vetro, il quale è trasparente alla luce di piccolissima lunghezza d'onda. Questo vetro è circa 10 volte più trasparente di quello ordinario pei raggi Roentgen; la sua densità equivale a 2,2 e la sua durezza a 6.

— L' « Association Française pour l'avancement des Sciences » si adunerà a Congresso in Reims. Le questioni poste all'ordine del giorno per la sezione di Fisica sono le seguenti:

1° Proprietà dell'arco elettrico; sue applicazioni alla produzione:

a) Delle radiazioni luminose (relatore Blondel).

b) Delle onde elettriche utilizzabili nella telegrafia e telefonia senza fili (r. Turpain e Tissot).

c) Dell'acido nitrico e dei nitrati per combinazione dell'azoto coll'ossigeno dell'aria (r. Blondin).

2° Trasformazione dell'energia calorifica in energia luminosa: proprietà selettive dei vari corpi; applicazioni all'illuminazione per incandescenza a gas o elettrica.

3° Effetti delle onde hertziane sul magnetismo del ferro; applicazioni ai Coherer (r. Maurain e Tissot).

— La Società scientifica Iablonowski di Lipsia ha bandito un concorso a premio (1500 marchi) per una memoria sulle leggi delle correnti fotoelettriche colla scadenza del 30 novembre 1907.

— L'Accademia Reale Belga ha bandito un concorso a premio (800 franchi) per ciascuno de' seguenti temi:

I. Sui fenomeni critici della fisica.
II. Sulla conducibilità termica dei liquidi.
III. Sull'induzione unipolare di Weber.

— La lunghezza del tunnel del Sempione è stata misurata dalla Commissione geodetica Svizzera sotto la direzione di Guillaume. I valori trovati nell'andata da Briga ad Iselle e nel ritorno sono rispettivamente di metri 20.146,011 e 20.146,022.

— I signori R. Benoit, Ch. Fabry ed A. Perot hanno compiuta una nuova determinazione del metro in lunghezze d'onda luminose; il risultato è:

1 metro $= 1.553.164,13 \times \lambda$ $\lambda = 0^{\mu}, 64384696$ (linea rossa del Cadmio).

— La Commissione permanente dell'Associazione sismologica internazionale ha bandito un concorso a premio (I 1000; II 700; III 500; IV 300 M) per la costruzione di un sismometro per terremoti vicini (Scadenza: 1° settembre).

— Dal 15 giugno al 15 settembre avrà luogo in Olmütz (Mähren) un'esposizione internazionale delle recenti invenzioni.

— Ci affrettiamo a segnalare la comparsa del primo fascicolo della importantissima « Rivista di Scienza » organo internazionale di sintesi scientifica; esso contiene articoli di Picard, Ostwald, Ciamician, Raffaele, Tannery etc.

— Riproduciamo il seguente articolo, comparso nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »:

PER L'UNIFICAZIONE DELLE NOTAZIONI VETTORIALI;

PROPOSTE DI

C. Burali-Forti (Torino) e **R. Marcolongo** (Messina).

Il calcolo vettoriale è ora adoperato quasi da tutti nelle questioni di meccanica e in quelle di fisica riguardanti specialmente l'elettricità. E se questo mirabile strumento di ricerca e di esposizione si è diffuso con una relativa lentezza, se è ancora accolto con una certa diffidenza, si deve al fatto che i diversi autori impiegano nomi e segni diversi per indicare i medesimi enti vettoriali.

Nel prossimo Congresso dei matematici a Roma (1908) è bene che sia trattata la questione delle notazioni vettoriali, ed è certo opportuno e importante proporre che per i vettori (almeno nella parte che più da vicino riguarda le applicazioni) si adotti un algoritmo unico, come è unico (e universale) quello dell'Algebra e dell'Analisi. Noi, — convinti dell'utilità pratica del calcolo vettoriale e desiderosi di vederne unificate le notazioni — ci proponiamo di studiare la questione e preparare tutto il materiale *storico*, *scientifico* e *pratico* indispensabile per giungere ad un algoritmo unico (o scelto fra i già esistenti, o nuovo) che, conservando tutti i pregi già acquisiti dal calcolo vettoriale ne elimini, fin che è possibile, tutti i difetti.

I varî criteri personali che hanno condotto all'attuale anarchia di notazione non possono contribuire (anzi !), mantenuti integralmente, alla opportuna e desiderata unificazione; tutt'al più possono condurne a render la *sorte* arbitra della scelta! Bisogna quindi abbandonare ogni criterio personale, e, ove occorra, ogni riguardo, e con un accurato confronto delle varie notazioni, sia in sè che in azione, metterne in piena luce pregi e difetti. Questo noi speriamo di poter fare nei prossimi articoli, quanto più brevemente ci sarà possibile. Il nostro desiderio di esser brevi (e quindi efficaci) è vivissimo; ma la grande varietà dei simboli, la diversità di natura delle varie definizioni e, talvolta, la loro imprecisione, ci costringono ad un rapido ma accurato studio degli enti vettoriali, rispetto a quelli geometrici da cui derivano, rispetto alla loro reale importanza pratica, e infine, rispetto al calcolo algebrico universalmente noto e adottato. In questo primo articolo vogliamo soltanto esaminare brevemente due criteri generali che, secondo noi, debbono presiedere alla scelta o formazione di quell'algoritmo vettoriale che un solenne voto del Congresso internazionale di Roma consiglierà come *linguaggio vettoriale universale*.

La parte di calcolo vettoriale che si applica attualmente nelle questioni di fisica e di meccanica richiede l'uso di due soli enti geometrici, *punto e vettore*, con un algoritmo limi-

tatissimo: *somma di un punto con un vettore* [1]), *somma dei vettori, prodotto di un vettore per un numero, prodotto scalare (o interno), prodotto vettoriale, derivata di un vettore gradiente* (o param. diff. di Hamilton), *divergenza e rotazione (o vortice o curl) di un punto e di un vettore.* Lo strumento, benchè piccolo e limitato, ha un vastissimo campo di applicazioni pratiche, e sempre più ne andrà acquistando. Pare dunque saggio consiglio cominciare da questa parte del calcolo geometrico generale l'unificazione dell'algoritmo. Però le imponenti opere di Möbius, Hamilton, Grassmann, e altri recenti lavori, provano che esistono strumenti più complessi il cui uso pare necessario in questioni che col piccolo calcolo vettoriale non si sanno risolvere direttamente; ed è certo che col diffondersi del calcolo vettoriale, e specialmente con la sua applicazione alla Geometria analitica, i potenti metodi ora indicati potranno e dovranno essere applicati. Or bene supponiamo per un momento che le notazioni fondamentali del piccolo calcolo siano scelte in modo da essere in contradizione con le notazioni fondamentali di Möbius, Hamilton, Grassmann. Che cosa avverrà? Ritornerà (se pure si sarà riusciti a toglierla) l'anarchia delle notazioni, i sistemi misti non tarderanno a ricomparire e renderanno la confusione ancor più grande di quello che non sia ora.

Non è difficile evitare le citate contradizioni, pur *raggiungendo la più grande semplicità di forma e di concetto,* e noi lo proveremo ampiamente nei seguenti articoli; per ora basti il seguente cenno.

Per il vettore di origine A e di estremo B, Hamilton propone le due notazioni B — A, A B; nella prima parte del suo libro usa di preferenza la notazione B — A, nel resto spariscono, quasi del tutto, entrambe, restando ogni vettore indicato da una sola lettera. Scelta la notazione B — A non si fa cosa contraddittoria alle notazioni di Hamilton, certamente, e nemmeno a quelle di Grassmann dalle cui forme *geometriche di prima specie* risulta appunto il vettore (differenza di due punti) indicato da B — A; anche la notazione dei *baricentri* di Möbius dà

1) Non da tutti usata, ma come vedremo, importantissima.

come caso limite la forma B — A al vettore di origine A e di estremo B, ma, di più, dalla notazione B — A si ricava la importantissima notazione di Möbius per i baricentri. Scelta, invece, la notazione A B (Bellavitis e molti degli autori moderni) rendiamo impossibile l'uso del calcolo di Grassmann nel quale A B indica una forma geometrica di seconda specie, ente ben diverso dal vettore di origine A e di estremo B; inoltre non si può giungere alla utilissima notazione di Möbius per i baricentri, perchè questa introdotta darà il vettore non più indicato da A B ma da B — A.

Ci pare dunque opportuno stabilire che: *le notazioni fondamentali del minimo sistema vettoriale non devono essere in contradizione con quelle fondamentali dei più ampi sistemi meccanico-geometrici di* Möbius, Hamilton, Grassmann.

Immaginiamo due sistemi di calcolo vettoriale, entrambi logicamente perfetti, col medesimo campo di applicabilità, e di reale importanza geometrica, fisica e meccanica. Le operazioni e funzioni che compariscono nel primo abbiano *leggi formali* identiche, o quasi, a quelle delle operazioni e funzioni fondamentali dell'Analisi (algoritmo universale), mentre ne differiscono del tutto, o quasi, quelle del secondo sistema. Le naturali leggi di *minimo sforzo* e di *economia* conducono a scegliere il primo sistema a preferenza del secondo; nel primo non vi è di *nuovo* che il significato geometrico o fisico delle operazioni, ma, salvo poche eccezioni, la parte algoritmica dell'Analisi rimane invariata; nel secondo *tutto è novo* e lo studio ne rimane tanto faticoso che come l'esperienza ha già provato, il sistema delle coordinate, con tutti i suoi difetti e la mancanza dei caratteri geometrici, viene ancora a rappresentare la linea di minimo sforzo. Un caratteristico esempio è fornito dal sistema hamiltoniano; la parte vettoriale ha un calcolo simile a quello algebrico, quella generale dei quaternioni no; la prima è quasi generalmente nota, la seconda è ritenuta come cosa assai astrusa.

La *somma* dei vettori (con lo stesso significato per tutti) gode di proprietà formali identiche all'operazione + dell'Algebra, e sarebbe tanto strano indicarla con un segno diverso

da $+$, che tutti gli autori sono d'accordo nell'indicare con $a+b$ la somma del vettore a col vettore b. Ora supponiamo che per il vettore di origine A e di estremo B si sia adottata la notazione A B; ne risulta che

$$AB + BC = AC$$

e questa è proprietà *formale* che non appartiene al calcolo algebrico [1]), invece con la notazione B — A si ha

$$(B - A) + (C - B) = C - A$$

e le leggi formali dei segni $+$ e $-$ sono conservate. Ancora un importante esempio. Sia P (t) un *punto* funzione della variabile numerica t; adottata la notazione B — A e definito (come di solito) il prodotto di un vettore per un numero, si ha che

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h}$$

è un vettore; il *limite* per $h = 0$ è la *derivata di* P *rispetto a t*, e le proprietà formali delle *derivate* si estendono immediatamente al calcolo vettoriale, cosa che è, evidentemente, impedita dalla notazione A B [2]).

Si capisce che noi intendiamo affermare l' opportunità, anzi la necessità, di conservare quanto più è possibile le leggi formali dell' algoritmo algebrico [3]), ma non pretendiamo, certa-

1) Secondo la notazione di Grassmann per le forme di 2.a specie $AB + BC = (A - C) B$ che tenuto conto della proprietà $BC = - CB$ del prodotto alternato, conserva le proprietà formali algebriche

2) Nei seguenti articoli esamineremo più ampiamente la questione relativa alla notazione B — A, che, lo avvertiamo subito, è fondamentale per raggiungere l'alto ideale di massima semplicità. Ci occuperemo pure della *somma di un punto con un Vettore* (traslazione) operazione trascurata da molti, e a torto, perchè per mezzo di essa: si può considerare un *punto* funzione di una variabile numerica non legato ad un punto fisso (come in Hamilton, Cesàro, etc.) o ad un sistema di assi (coordinate); le leggi formali algebriche della somma (+), differenza (—), prodotto per un numero, hanno *completa* corrispondenza nel calcolo vettoriale; ne deriva il calcolo dei *baricentri* di Möbius, e le *forme di prima specie* di Grassmann; ne deriva tutta la teoria delle *coordinate cartesiane* che assume forma geometrica semplicissima. Tutto ciò è però *distrutto* dalla notazione A B.

3) Ad un esempio le *parentesi* hanno in algebra l'ufficio ben precisato di raggruppare i segni di una successione per indicare l'ordine nel quale operazioni e funzioni si devono applicare. Tale legge merita di esser conservata, perchè universale, e converrà quindi abbandonare l'uso, parzialmente invalso, di indicare con le parentesi delle operazioni o funzioni, uso che riduce alcune formule ad un *sistema cellulare* algebricamente illeggibile.

mente, di spingere la permanenza delle leggi formali al di là del possibile. Il prodotto *scalare* e *vettoriale* non ha certo il suo corrispondente in algebra: ma se simboli e leggi potranno esser non dissimili (ed è possibile, Grassmann, Gibbs, ...) da quelli dell'algebra, tanto meglio. Ci parrebbe però un grave errore allontanarsi dall'*identità* con l'algebra (possibilissima) per la somma, prodotto per un numero, differenza, derivate, integrali.

Ci pare dunque opportuno stabilire che: *operazioni e funzioni del calcolo vettoriale devono esser scelte in modo da esser soggette a leggi formali, il più possibile simili a quelle universalmente note dell'analisi.*

Un calcolo vettoriale, per quanto limitato che soddisfi ai due precedenti criteri, non ipoteca il passato e l'avvenire, e usufruisce largamente di quanto vi è di buono nel presente; esso ha dunque in sè quanto basta per *aspirare* alla vitalità; altri criteri, che si presenteranno spontanei nell'analisi che faremo, gli daranno quanto basta per *pretendere* alla vitalità. La sua vita poi dipenderà dalla morte dei vari criteri personali; noi cominceremo con uccidere i nostri: speriamo che gli altri ci imitino!

Ai colleghi tutti rivolgiamo caldo appello di interessarsi alla importante questione; i loro pareri, i loro consigli, il loro aiuto con note bibliografiche, storiche ecc., saranno accolti con riconoscenza, e ci saranno utilissimi, non solo per condurre a termine il difficile lavoro, ma anche per giungere a quelle *proposte concrete* che devono rappresentare quanto di meglio è possibile ottenere praticamente nelle condizioni attuali della scienza e delle applicazioni.

— Il Socio Prof. Del Lungo (Livorno) propone ai colleghi le seguenti questioni:

a) Ci sono lavori teorici o sperimentali sul campo elettrico in conduttore discontinuo e sulle condizioni della scarica in esso?

b) Il movimento di un conduttore solido o liquido (non soggetto ad elettrolisi) fra due elettrodi, influisce sulla resistenza?

I. Sui fenomeni critici della fisica.
II. Sulla conducibilità termica dei liquidi.
III. Sull'induzione unipolare di Weber.

— La lunghezza del tunnel del Sempione è stata misurata dalla Commissione geodetica Svizzera sotto la direzione di Guillaume. I valori trovati nell'andata da Briga ad Iselle e nel ritorno sono rispettivamente di metri 20.146,011 e 20.146,022.

— I signori R. Benoit, Ch. Fabry ed A. Perot hanno compiuta una nuova determinazione del metro in lunghezze d'onda luminose; il risultato è:

1 metro $= 1.553.164,13 \times \lambda$ $\lambda = 0^{\mu}, 64384696$ (linea rossa del Cadmio).

— La Commissione permanente dell'Associazione sismologica internazionale ha bandito un concorso a premio (I 1000; II 700; III 500; IV 300 M) per la costruzione di un sismometro per terremoti vicini (Scadenza: 1° settembre).

— Dal 15 giugno al 15 settembre avrà luogo in Olmütz (Mähren) un'esposizione internazionale delle recenti invenzioni.

— Ci affrettiamo a segnalare la comparsa del primo fascicolo della importantissima « Rivista di Scienza » organo internazionale di sintesi scientifica; esso contiene articoli di Picard, Ostwald, Ciamician, Raffaele, Tannery etc.

— Riproduciamo il seguente articolo, comparso nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »:

PER L'UNIFICAZIONE DELLE NOTAZIONI VETTORIALI;

PROPOSTE DI

C. Burali-Forti (Torino) e **R. Marcolongo** (Messina).

Il calcolo vettoriale è ora adoperato quasi da tutti nelle questioni di meccanica e in quelle di fisica riguardanti specialmente l'elettricità. E se questo mirabile strumento di ricerca e di esposizione si è diffuso con una relativa lentezza, se è ancora accolto con una certa diffidenza, si deve al fatto che i diversi autori impiegano nomi e segni diversi per indicare i medesimi enti vettoriali.

Nel prossimo Congresso dei matematici a Roma (1908) è bene che sia trattata la questione delle notazioni vettoriali, ed è certo opportuno e importante proporre che per i vettori (almeno nella parte che più da vicino riguarda le applicazioni) si adotti un algoritmo unico, come è unico (e universale) quello dell'Algebra e dell'Analisi. Noi, — convinti dell'utilità pratica del calcolo vettoriale e desiderosi di vederne unificate le notazioni — ci proponiamo di studiare la questione e preparare tutto il materiale *storico, scientifico* e *pratico* indispensabile per giungere ad un algoritmo unico (o scelto fra i già esistenti, o nuovo) che, conservando tutti i pregi già acquisiti dal calcolo vettoriale ne elimini, fin che è possibile, tutti i difetti.

I varî criteri personali che hanno condotto all'attuale anarchia di notazione non possono contribuire (anzi!), mantenuti integralmente, alla opportuna e desiderata unificazione; tutt'al più possono condurne a render la *sorte* arbitra della scelta! Bisogna quindi abbandonare ogni criterio personale, e, ove occorra, ogni riguardo, e con un accurato confronto delle varie notazioni, sia in sè che in azione, metterne in piena luce pregi e difetti. Questo noi speriamo di poter fare nei prossimi articoli, quanto più brevemente ci sarà possibile. Il nostro desiderio di esser brevi (e quindi efficaci) è vivissimo; ma la grande varietà dei simboli, la diversità di natura delle varie definizioni e, talvolta, la loro imprecisione, ci costringono ad un rapido ma accurato studio degli enti vettoriali, rispetto a quelli geometrici da cui derivano, rispetto alla loro reale importanza pratica, e infine, rispetto al calcolo algebrico universalmente noto e adottato. In questo primo articolo vogliamo soltanto esaminare brevemente due criteri generali che, secondo noi, debbono presiedere alla scelta o formazione di quell'algoritmo vettoriale che un solenne voto del Congresso internazionale di Roma consiglierà come *linguaggio vettoriale universale.*

La parte di calcolo vettoriale che si applica attualmente nelle questioni di fisica e di meccanica richiede l'uso di due soli enti geometrici, *punto e vettore*, con un algoritmo limi-

tatissimo: *somma di un punto con un vettore* [1], *somma dei vettori, prodotto di un vettore per un numero, prodotto scalare (o interno), prodotto vettoriale, derivata di un vettore gradiente* (o param. diff. di Hamilton), *divergenza e rotazione (o vortice o curl) di un punto e di un vettore*. Lo strumento, benchè piccolo e limitato, ha un vastissimo campo di applicazioni pratiche, e sempre più ne andrà acquistando. Pare dunque saggio consiglio cominciare da questa parte del calcolo geometrico generale l'unificazione dell'algoritmo. Però le imponenti opere di Möbius, Hamilton, Grassmann, e altri recenti lavori, provano che esistono strumenti più complessi il cui uso pare necessario in questioni che col piccolo calcolo vettoriale non si sanno risolvere direttamente; ed è certo che col diffondersi del calcolo vettoriale, e specialmente con la sua applicazione alla Geometria analitica, i potenti metodi ora indicati potranno e dovranno essere applicati. Or bene supponiamo per un momento che le notazioni fondamentali del piccolo calcolo siano scelte in modo da essere in contradizione con le notazioni fondamentali di Möbius, Hamilton, Grassmann. Che cosa avverrà? Ritornerà (se pure si sarà riusciti a toglierla) l'anarchia delle notazioni, i sistemi misti non tarderanno a ricomparire e renderanno la confusione ancor più grande di quello che non sia ora.

Non è difficile evitare le citate contradizioni, pur *raggiungendo la più grande semplicità di forma e di concetto*, e noi lo proveremo ampiamente nei seguenti articoli; per ora basti il seguente cenno.

Per il vettore di origine A e di estremo B, Hamilton propone le due notazioni B — A, AB; nella prima parte del suo libro usa di preferenza la notazione B — A, nel resto spariscono, quasi del tutto, entrambe, restando ogni vettore indicato da una sola lettera. Scelta la notazione B — A non si fa cosa contradittoria alle notazioni di Hamilton, certamente, e nemmeno a quelle di Grassmann dalle cui forme *geometriche di prima specie* risulta appunto il vettore (differenza di due punti) indicato da B — A; anche la notazione dei *baricentri* di Möbius dà

1) Non da tutti usata, ma come vedremo, importantissima.

come caso limite la forma B — A al vettore di origine A e di estremo B, ma, di più, dalla notazione B — A si ricava la importantissima notazione di Möbius per i baricentri. Scelta, invece, la notazione A B (Bellavitis e molti degli autori moderni) rendiamo impossibile l'uso del calcolo di Grassmann nel quale A B indica una forma geometrica di seconda specie, ente ben diverso dal vettore di origine A e di estremo B; inoltre non si può giungere alla utilissima notazione di Möbius per i baricentri, perchè questa introdotta darà il vettore non più indicato da A B ma da B — A.

Ci pare dunque opportuno stabilire che: *le notazioni fondamentali del minimo sistema vettoriale non devono essere in contradizione con quelle fondamentali dei più ampi sistemi meccanico-geometrici di* Möbius, Hamilton, Grassmann.

Immaginiamo due sistemi di calcolo vettoriale, entrambi logicamente perfetti, col medesimo campo di applicabilità, e di reale importanza geometrica, fisica e meccanica. Le operazioni e funzioni che compariscono nel primo abbiano *leggi formali* identiche, o quasi, a quelle delle operazioni e funzioni fondamentali dell'Analisi (algoritmo universale), mentre ne differiscono del tutto, o quasi, quelle del secondo sistema. Le naturali leggi di *minimo sforzo* e di *economia* conducono a scegliere il primo sistema a preferenza del secondo; nel primo non vi è di *nuovo* che il significato geometrico o fisico delle operazioni, ma, salvo poche eccezioni, la parte algoritmica dell'Analisi rimane invariata; nel secondo *tutto è novo* e lo studio ne rimane tanto faticoso che come l'esperienza ha già provato, il sistema delle coordinate, con tutti i suoi difetti e la mancanza dei caratteri geometrici, viene ancora a rappresentare la linea di minimo sforzo. Un caratteristico esempio è fornito dal sistema hamiltoniano; la parte vettoriale ha un calcolo simile a quello algebrico, quella generale dei quaternioni no; la prima è quasi generalmente nota, la seconda è ritenuta come cosa assai astrusa.

La *somma* dei vettori (con lo stesso significato per tutti) gode di proprietà formali identiche all'operazione + dell'Algebra, e sarebbe tanto strano indicarla con un segno diverso

da $+$, che tutti gli autori sono d'accordo nell'indicare con $a+b$ la somma del vettore a col vettore b. Ora supponiamo che per il vettore di origine A e di estremo B si sia adottata la notazione A B; ne risulta che

$$AB + BC = AC$$

e questa è proprietà *formale* che non appartiene al calcolo algebrico [1]), invece con la notazione B — A si ha

$$(B - A) + (C - B) = C - A$$

e le leggi formali dei segni $+$ e $-$ sono conservate. Ancora un importante esempio. Sia P (t) un *punto* funzione della variabile numerica t; adottata la notazione B — A e definito (come di solito) il prodotto di un vettore per un numero, si ha che

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h}$$

è un vettore; il *limite* per $h = 0$ è la *derivata di* P *rispetto a* t, e le proprietà formali delle *derivate* si estendono immediatamente al calcolo vettoriale, cosa che è, evidentemente, impedita dalla notazione A B [2]).

Si capisce che noi intendiamo affermare l' opportunità, anzi la necessità, di conservare quanto più è possibile le leggi formali dell' algoritmo algebrico [3]), ma non pretendiamo, certa-

1) Secondo la notazione di Grassmann per le forme di 2.a specie $AB + BC = (A - C)$ B che tenuto conto della proprietà $BC = -CB$ del prodotto alternato, conserva le proprietà formali algebriche

2) Nei seguenti articoli esamineremo più ampiamente la questione relativa alla notazione B — A, che, lo avvertiamo subito, è fondamentale per raggiungere l'alto ideale di massima semplicità. Ci occuperemo pure della *somma di un punto con un Vettore* (traslazione) operazione trascurata da molti, e a torto, perchè per mezzo di essa: si può considerare un *punto* funzione di una variabile numerica non legato ad un punto fisso (come in Hamilton, Cesàro, etc.) o ad un sistema di assi (coordinate); le leggi formali algebriche della somma ($+$), differenza ($-$), prodotto per un numero, hanno *completa* corrispondenza nel calcolo vettoriale; ne deriva il calcolo dei *baricentri* di Möbius, e le *forme di prima specie* di Grassmann; ne deriva tutta la teoria delle *coordinate cartesiane* che assume forma geometrica semplicissima. Tutto ciò è però *distrutto* dalla notazione A B.

3) Ad un esempio le *parentesi* hanno in algebra l'ufficio ben precisato di raggruppare i segni di una successione per indicare l'ordine nel quale operazioni e funzioni si devono applicare. Tale legge merita di esser conservata, perchè universale, e converrà quindi abbandonare l'uso, parzialmente invalso, di indicare con le parentesi delle operazioni o funzioni, uso che riduce alcune formule ad un *sistema cellulare* algebricamente illeggibile.

mente, di spingere la permanenza delle leggi formali al di là del possibile. Il prodotto *scalare* e *vettoriale* non ha certo il suo corrispondente in algebra: ma se simboli e leggi potranno esser non dissimili (ed è possibile, Grassmann, Gibbs, ...) da quelli dell'algebra, tanto meglio. Ci parrebbe però un grave errore allontanarsi dall'*identità* con l'algebra (possibilissima) per la somma, prodotto per un numero, differenza, derivate, integrali.

Ci pare dunque opportuno stabilire che: *operazioni e funzioni del calcolo vettoriale devono esser scelte in modo da esser soggette a leggi formali, il più possibile simili a quelle universalmente note dell'analisi.*

Un calcolo vettoriale, per quanto limitato che soddisfi ai due precedenti criteri, non ipoteca il passato o l'avvenire, e usufruisce largamente di quanto vi è di buono nel presente; esso ha dunque in sè quanto basta per *aspirare* alla vitalità; altri criteri, che si presenteranno spontanei nell'analisi che faremo, gli daranno quanto basta per *pretendere* alla vitalità. La sua vita poi dipenderà dalla morte dei vari criteri personali; noi cominceremo con uccidere i nostri: speriamo che gli altri ci imitino!

Ai colleghi tutti rivolgiamo caldo appello di interessarsi alla importante questione; i loro pareri, i loro consigli, il loro aiuto con note bibliografiche, storiche ecc., saranno accolti con riconoscenza, e ci saranno utilissimi, non solo per condurre a termine il difficile lavoro, ma anche per giungere a quelle *proposte concrete* che devono rappresentare quanto di meglio è possibile ottenere praticamente nelle condizioni attuali della scienza e delle applicazioni.

— Il Socio Prof. Del Lungo (Livorno) propone ai colleghi le seguenti questioni:

a) Ci sono lavori teorici o sperimentali sul campo elettrico in conduttore discontinuo e sulle condizioni della scarica in esso?

b) Il movimento di un conduttore solido o liquido (non soggetto ad elettrolisi) fra due elettrodi, influisce sulla resistenza?

LIBRI NUOVI

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL.

R. DE VALBREUZE.

(170 p. Paris, " l'Éclairage électrique „ 1907).

Nei primi capitoli del libro l'A. richiama brevemente e chiaramente alcuni di quei fenomeni generali della fisica che hanno più da vicino attinenza col soggetto trattato. In particolare poi si occupa dei fenomeni riguardanti la radiazione dell'energia, e mette in evidenza i caratteri distintivi fra le radiazioni chimiche, luminose, calorifiche ed elettriche.

E dopo aver mostrato chiaramente l'identità fra le radiazioni elettriche e quelle luminose, descrive con successione storica i metodi sperimentali per la trasmissione dei segnali a distanza per mezzo di queste radiazioni.

Inoltre l'A. svolge molto efficacemente quelle nozioni fondamentali di Elettrotecnica, che sono necessarie per ben comprendere il meccanismo dei circuiti oscillanti, anche da chi non ha un vasto corredo di cognizioni di fisica.

Nell'ottavo capitolo riferisce i primi tentativi eseguiti per la trasmissione dei segnali a distanza, e riporta cronologicamente le esperienze fatte fino a quelle del Marconi.

E dopo aver descritto i principali metodi impiegati per la recezione e la trasmissione dei segnali, spiega dettagliatamente tutti i fenomeni che entrano in giuoco nei varii strumenti necessari sia a produrre, che a ricevere le onde.

Nell'ultima parte poi l'A. prende in esame i principali sistemi usati per il cambiamento delle comunicazioni radiotelegrafiche, e descrive sommariamente alcune delle stazioni radiotelegrafiche più cospicue.

G. N.

DIE RADIOAKTIVEN SUBSTANZEN UND DIE THEORIE DES ATOMZERFALLES.

PAUL GRUNER.

(101 pag. A. Francke ed., Berna 1906).

Questo lavoro comprende le lezioni dettate dall'autore nell'Università di Berna durante l'anno scolastico 1904-5; esso è stato tuttavia messo al corrente dei recenti progressi della radioattività.

I fenomeni radioattivi vi sono contemplati in base alla teoria rutherfordiana della disintegrazione atomica. Dopo una introduzione storica, vengono esaminati i caratteri dei raggi Becquerel, e vengono indi passati in rassegna i vari corpi radioattivi a noi sinora noti. Le proprietà caratteristiche delle emanazioni, nonchè le manifestazioni di attività indotta, vengono sottoposte ad accurato studio, essendochè è appunto dall'esame di cotesta categoria di fenomeni che scaturisce logicamente la teoria di Rutherford.

La parte più importante del libro è senza dubbio quella in cui è esposta la teoria della disintegrazione atomica, teoria la quale ci conduce ad ammettere una evoluzione degli elementi chimici.

Il libretto è completato da una preziosa bibliografia dell'argomento.

Si può dire che quest'opera del Gruner si presta mirabilmente ad iniziare allo studio della radioattività chi non voglia adottare come guida pei primi passi il magistrale ma voluminoso trattato del Rutherford.

G. A. B.

DIE KATHODENSTRAHLEN

di G. C. SCHMIDT.

(1 vol. p. VI-127. Vieweg ed. Braunschweig).

Questo volumetto, che fa parte della serie di monografie « Die Wissenschaft », è una seconda edizione « migliorata e aumentata » dell'opuscolo pubblicato dallo Schmidt tre anni or sono.

Dopo avere nei due primi capitoli, che si possono chiamare d'introduzione, accennato all'ipotesi dell'etere elettromagnetico ed alle moderne teorie intorno alla natura dei fenomeni elettrolitici, l'autore entra a parlare dei raggi catodici, indicando anzitutto i metodi sperimentali da adoperarsi per ottenerli, e descrivendo poi l'insieme dei fenomeni che accompagnano la scarica elettrica nei gas rarefatti.

Interessante assai è il capitolo in cui l'autore passa in rassegna le varie teorie, ideate dall'epoca in cui vennero scoperti i raggi catodici sino ad oggi, per spiegare questi fenomeni.

I successivi capitoli sono consacrati alle varie proprietà dei raggi catodici, alla discussione della loro natura ed alla dimostrazione che essi non sono altro se non un flusso di elettroni, identici questi all'elettrone di Lorentz e Zeeman, ed al corpuscolo negativo la cui esistenza si constata nei fenomeni fotoelettrici, di dispersione per parte dei metalli incandescenti ecc.

In un capitolo viene trattata la questione della massa elettromagnetica, e vengono riferite le esperienze di Kauffman sui raggi β del radio.

Chiudono cotesta pregevolissima monografia un capitolo sui raggi canale ed una bibliografia, atta questa a rendere preziosi servigi a chi volesse entrare più profondamente nello studio dei raggi catodici.

G. A. B.

DIE NEUERE ENTWICKELUNG DER KRISTALLOGRAPHIE.

H. BAUMHAUER.

(Volume 7° della Collezione "Die Wissenschaft" p. 180. Braunschweig, Vieweg, 1906).

Il libro è rivolto sopratutto a fisici e chimici, che sono condotti dalle loro ricerche a dover seguire i progressi della cristallografia e sotto questo punto di vista è destinato a portare eccellenti frutti. L'introduzione si occupa della vessata questione della definizione di cristallo toccando largamente anche dei cristalli liquidi del Lehmann. Segue l'esposizione delle trentadue classi, in cui si possono raggruppare i cristalli a se-

conda delle loro proprietà di simmetria; tralasciando però ogni dimostrazione matematica che la classificazione sia esauriente. Il terzo capitolo tratta dei mezzi geometrici e fisici per scoprire gli elementi di simmetria nella sostanza cristallina; se in alcuni metodi fisici l'A. non dimostra forse sempre una piena famigliarità, importa richiamare l'attenzione del lettore sul trattamento delle faccie vicinali e dei fenomeni di corrosione. Nei cap toli seguenti sono esposti la formazione dei geminati, i fenomeni di accrescimento e finalmente la polimorfia, l'isomorfia ed i risultati dei tentativi fatti per scoprire relazioni fra la costituzione chimica e la formola cristallina.

Il piccolo volume contribuirà al benefico scopo di volgarizzare i progressi della cristallografia presso i fisici.

A. S.

LEITFADEN DER WETTERKUNDE

di R. BÖRNSTEIN.

(p. 230 tav. XXXII. Braunschweig, Vieweg, 1906).

Lo scopo del libro ci è detto dall'Autore stesso nella prefazione: esporre in modo semplice e chiaro le leggi fondamentali dei fenomeni meteorologici ed indurre chi abbia la passione dell'osservazione dei fenomeni naturali alla constatazione personale delle modalità di svolgimento delle manifestazioni meteorologiche. Il fine propostosi dall'Autore è pienamente raggiunto in molti capitoli del suo libro, ma, ci sembra, non in tutti; l'aver voluto riportare le ultime ricerche sull'elettricità atmosferica e fenomeni affini e sulla meteorologia dell'alta atmosfera obbliga l'Autore a un linguaggio la cui intelligenza non sarà certo così generale come si proponeva l'Autore.

Vorremmo ancora osservare come non ci sembri del tutto opportuno l'inserire l'esposizione di certi fenomeni ottici dell'atmosfera come la rifrazione atmosferica, i crepuscoli rossi e la luce polare nel capitolo della Nebulosità; così pure ci appare un po' singolare la distribuzione della materia nel penultimo capitolo ove i vari fenomeni appariscono per esempio in quest'ordine: Distribuzione della pressione nei temporali, lampi,

tuoni, fuochi di S. Elmo, parafulmini, propagazione dei temporali, classificazione dei temporali, influenza del suolo sui temporali, elettricità atmosferica, superfici di livello, caduta di potenziale, teoria della jonizzazione dell'atmosfera, radioattività, teoria dei temporali, massimi e minimi barometrici e così via.

Un'altra osservazione ci suggerisce l'indice delle citazioni. Come mai a proposito dei lavori sui temporali non si trova una parola degli studi dello Schiapparelli e del Ferrari? A proposito del Wetterschiessen vengono riportate molto diffusamente e la parte presa in questi studi dall'Austria e le conclusioni della conferenza di Graz, non si fa neppure una parola delle esperienze effettuate in Italia che pure in quella conferenza vennero proclamate a modello. Così non v'è neppure un accenno ai lavori del Millosevich, del Chistoni, del Ragona, del Palmieri e di tanti altri, e questa soppressione dei resultati degli studi effettuati in Italia appare tanto più manifesta là dove si parla del magnetismo di roccia prodotto dalla fulminazione; ivi sono citate alcune osservazioni, molto incomplete, del Töpler pubblicate nel 1901 e si trascurano tutti gli studi anteriori dei Proff. Keller, Folgheraiter e Sella (1892) dell'Università di Roma che pure si trovan citati in tutti i trattati. A. P.

UEBER KATHODENSTRAHLEN.

P. LÉNARD.

(44 p. J. A. Barth ed. Lipsia, 1906).

In questo opuscolo è riportato il testo della conferenza tenuta da Lénard dinanzi all'Accademia Reale delle Scienze di Stoccolma in occasione della consegna a lui fatta del premio Nobel per la Fisica.

Dopo un'interessante esposizione della storia delle sue ricerche intorno ai raggi catodici, incominciando dall'epoca in cui, essendo assistente di Herz, egli riuscì a condurre i raggi stessi fuori del tubo a vuoto, attraverso ad una finestra d'alluminio, viene discussa la natura dei detti raggi, quale risulta dall'insieme degli studi fatti, e, finalmente è esposta la parte

importante che viene a prendere l'elettrone nel problema della costituzione della materia.

La notorietà dell'autore invoglierà certo chiunque s'interessi degli attuali problemi scientifici a leggere questa conferenza, in cui sono esposte le sue idee intorno ad alcuni fra i problemi che maggiormente occupano la mente degli studiosi.

Una bibliografia, disposta in ordine cronologico, completa molto opportunamente il testo della bella conferenza.

G. A. B.

Libri inviati per recensione

R. DE VALBREUZE — « Notions générales sur la télégraphie sans fils ».
(Eclairage Electrique. Paris, 1907. L. 7,50).

Dott. L. SETTIMJ — « Caoutchouc e gutta-percha ».
(U. Hoepli. Milano, 1907. L. 3).

Dott. P. E. ALESSANDRI — « Merceologia tecnica ». 2 volumi.
(U. Hoepli. Milano, 1907). L. 12).

E. GARUFFA — « Orologeria moderna ».
(U. Hoepli. Milano, 1907. L. 5,50).

GAETANO FAZZARI — « Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo ».
(Remo Sandron. Palermo, 1907. L. 4).

Dott. H. BARKHAUSEN — « Das Problem der Schwingungserzeugung ».
(S. Hirzel. Leipzig, 1907. Mk. 4).

« Bulletin of the Bureau of Standards ». Vol. 3°, n. 1. Aprile 1907.
(Departiment of Commerce and Labor. Washington).

EMILE PIERARD — « Cours d'Électricité et de Magnétism ». Tome 1r.
(Ramlot, Bruxelles, 1907. L. 10).

ARTURO BERRY — « Compendio di storia della Astronomia ». Traduzione dall'inglese del Dott. Dionisio Gambioli.
(Albrighi, Segati e C. Roma, 1907. L. 8).

Prof. LUDWIG BOLTZMANN « Populäre Schriften ».
(A. Barth. Leipzig, 1905. Mk. 8).

Pubblicazioni inviate in dono alla Società Italiana di Fisica o al Nuovo Cimento

Dott. B. Dessau — « La nuova teoria della materia e le sue basi sperimentali ».

Dott. L. G. Scarpa — « Nuova cura fisio-meccanica della tubercolosi polmonare ».

Dott. A. Campetti — « Sulla dispersione della elettricità in varii gas a temperatura elevata ».

W. Hallwachs — « Ueber die lichtelektrische Ermüdung ».

R. Commissione geodetica italiana — « Processo verbale delle sedute tenute in Roma nei giorni 3, 4 e 6 aprile 1906 ».

R. Commissione geodetica italiana — « Differenza di longitudine tra gli Osservatori di Padova e di Bologna ». Relazioni.

Pietro Salvioni, *gerente responsabile*

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Hanno fatto adesione alla Società i signori:

Del Lungo Prof. Carlo	Spezia, R. Liceo
Sartori Prof. Leonzio	Milano, R. Istituto Tecnico
Vita Prof. Decio	Roma, Via Governo vecchio, 34

Continuazione della Nota pubblicata a pag. VII.

Hanno pagato la quota del 1906 i Soci:

Bonacini Carlo
Lo Surdo Antonino
Malagoli Riccardo
Negro Carlo
Umani Antonio

Hanno pagato la quota del 1907 i Soci.

Alessandri Guido
Blanc Alberto
Blaserna Pietro
Berti Giuseppe di Venanzio
Chiarini Vittorio
Corbino Orso Mario
Crescini Ezio
Del Lungo Carlo
Lambertenghi Giacinto
Marianini Abdenago
Rovelli Costantino
Sella Alfonso
Torre Giov. Battista
Vailati Giovanni
Vita Decio

Serie V. Vol. XIII. Giugno 1907.

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA
SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

PUBBLICATO PER CURA DEI DIRETTORI
A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA

E DEI DELEGATI DELLA SOCIETÀ
G. P. GRIMALDI ED A. SELLA

INDICE

PISA DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1907

Del « NUOVO CIMENTO » si pubblica ogni mese un fascicolo di **80** pagine.

L'abbonamento è obbligatorio per un anno, e s'intende rinnovato, quando non sia disdetto entro il dicembre.

Chi vuole pagare l'abbonamento non ha che da versare, al principio di ogni anno, ad un ufficio postale italiano o estero la somma di

Lire 18 per l'Italia
„ 20 per l'Estero

a favore del Sig. **ALFREDO LAVACCHINI, Via Gino Capponi, 3, FIRENZE.**

Coloro che appartengono alla Società Italiana di Fisica sono pregati di spedire la quota di ***L. 18*** al Cassiere Prof. A. Stefanini, Lucca, il quale a richiesta rilascierà la quietanza di L. 15 se l'abbonamento è a carico dell'Istituto a cui il Socio appartiene.

Chi desidera pubblicare nel « Nuovo Cimento » una memoria originale manderà il relativo manoscritto ad uno dei cinque membri del Comitato di Compilazione Proff.: Battelli, Ròiti, Volterra, Grimaldi, Sella. E dei lavori originali pubblicati nel Giornale l'autore riceverà gratis 50 copie.



CARLO MATTEUCCI

(20 GIUGNO 1811 – 25 GIUGNO 1868)

DANESI - ROMA

ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI FUNZIONALI ALLA FISICA-MATEMATICA,

del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

CAPITOLO IV.

Problema interno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie.

1. Siano date tre funzioni finite e continue $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ dei punti della superficie σ. Si consideri il sistema di equazioni funzionali:

$$(1), \quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = u(\alpha', \beta'), \\ \psi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = v(\alpha', \beta'), \\ \chi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = w(\alpha', \beta'), \end{cases}$$

dove le $X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$, $Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$,... sono le funzioni date dalle formule (14) al Cap. II, e dove le $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ sono le funzioni incognite; si considerino ancora il corrispondente sistema di equazioni omogenee:

$$(2), \quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = 0, \\ \psi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = 0, \\ \chi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = 0, \end{cases}$$

e il sistema a questo *coniugato:*

$$(3)_1 \quad \begin{cases} \varphi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, X'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta)\,.\,\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma=0\,, \\ \psi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, X''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta)\,.\,\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma=0\,, \\ \chi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, X'''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta)\,.\,\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma=0\,. \end{cases}$$

Osserviamo che le funzioni caratteristiche dei sistemi di equazioni $(1)_1$, $(2)_1$: $X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha'\beta')$, $Y'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$,..... sono formate ciascuna dal prodotto di una funzione finita e continua (la continuità esclusa per $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$) per l'espressione $\frac{d\frac{1}{r^2}}{dn}$; sicchè esse sono sempre finite e continue, e solo per $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ divengono infinite come $\frac{1}{\{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2\}^{3/2}}$ (Cfr. Capitolo III, § 2).

Un fatto analogo si verifica per le funzioni caratteristiche del sistema di equazioni $(3)_1$: $X'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta)$, $Y'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta)$,...

2. Dimostriamo che *il sistema di equazioni* $(3)_1$ *non ammette soluzione alcuna.*

Infatti ammesso che le funzioni $\varphi_1(\alpha,\beta)$, $\psi_1(\alpha,\beta)$, $\chi_1(\alpha,\beta)$ formino una soluzione del sistema $(3)_1$, si formi con esse il seguente sistema di strati elastici:

$$u_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\,\varphi_1(\alpha,\beta).u'd\sigma\,,\quad v_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\,\varphi_1(\alpha,\beta).u''d\sigma\,,$$

$$w_1(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\,\varphi_1(\alpha,\beta).u'''d\sigma\,.$$

In virtù del teorema 1° al Capitolo precedente, le funzioni $\varphi_1(\alpha,\beta)$, $\psi_1(\alpha,\beta)$, $\chi_1(\alpha,\beta)$ dovranno essere finite e continue su tutta la superficie σ; e quindi, considerate le $u_1(\xi,\eta,\zeta)$, $v_1(\xi,\eta,\zeta)$, $w_1(\xi,\eta,\zeta)$ come le componenti di una deformazione del mezzo infinito S', si avrà per le componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ, ricorrendo alle formole (20)' del Cap. II,

$$(4)\begin{cases}\overline{\overline{U}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}U^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\varphi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma\,,\\ \overline{\overline{V}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}V^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\psi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma\,,\\ \overline{\overline{W}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}W^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\chi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma\,.\end{cases}$$

Queste ci dànno in virtù delle $(3)_1$:

$$(3')_1\quad \overline{\overline{U}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=0\,,\quad \overline{\overline{V}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=0\quad \overline{\overline{W}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=0\,,$$

qualunque sia il punto $p'\equiv(\alpha',\beta')$ di σ; ed allora, in forza del resultato 4° al § 8 del Cap. I, si avrà:

$$\text{(in tutto S')}\qquad u_1(\xi,\eta,\zeta)=v_1(\xi,\eta,\zeta)=w_1(\xi,\eta,\zeta)=0\,.$$

Siccome le funzioni $u_1(\xi,\eta,\zeta)$, $v_1(\xi,\eta,\zeta)$, $w_1(\xi,\eta,\zeta)$ sono continue anche quando il punto $P\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ attraversa la superficie σ, così si avrà, in virtù del risultato 1° al § 7 del Cap. I.

$$\text{(in tutto S)}\qquad u_1(\xi,\eta,\zeta)=v_1(\xi,\eta,\zeta)=w_1(\xi,\eta,\zeta)=0\,;$$

e quindi ancora, per P variabile nel campo finito S, adoperando le (20) del Cap. II,

$$\overline{U}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}U^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=-\varphi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma=0\,,$$

$$\overline{V}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}V^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=-\psi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma=0\,,$$

$$\overline{W}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}W^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=-\chi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma=0\,.$$

Queste, unite alle (4) e alle $(3')_1$, ci dànno per qualunque punto (α',β') di σ:

$$0=\overline{\overline{U}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')-\overline{U}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=2\varphi_1(\alpha',\beta'),\ 0=\overline{\overline{V}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')-\overline{V}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=2\psi_1(\alpha',\beta')\,,$$

$$0=\overline{\overline{W}}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')-\overline{W}{}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=2\chi_1(\alpha',\beta')\,,$$

ossia su tutta la superficie σ:

$$\phi_1(\alpha,\beta)=0, \qquad \psi_1(\alpha,\beta)=0, \qquad \chi_1(\alpha,\beta)=0,$$

come volevamo dimostrare.

3. Come conseguenza del teorema testè stabilito, si ha, in virtù del teorema 1° al § 1 del Capitolo precedente, che il sistema $(2)_1$ non ammette soluzione alcuna; e quindi per il teorema 2° al § 1 del Capitolo precedente, avremo che il sistema di equazioni $(1)_1$ ammette una soluzione $\phi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$, che sarà finita e continua, ed una solamente. Con questa soluzione si formi il sistema di pseudo-doppi strati elastici:

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma \,.\, \phi(\alpha,\beta)d\sigma, \quad v(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma \,.\, \phi(\alpha,\beta)d\sigma,$$

$$w(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma \,.\, \phi(\alpha,\beta)\,d\sigma\,.$$

Dalle formole (16) al Cap. II e dalle equazioni $(1)_1$ risulta, per $P\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ variabile nel campo finito S,

$$\lim_{P=p'} u(\xi,\eta,\zeta)=\phi(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta').\phi(\alpha,\beta)\,d\sigma=u(\alpha',\beta'),$$

$$\lim_{P=p'} v(\xi,\eta,\zeta)=\psi(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, X''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta').\phi(\alpha,\beta)\,d\sigma=v(\alpha',\beta'),$$

$$\lim_{P=P'} w(\xi,\eta,\zeta)=\chi(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, X'''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta').\phi(\alpha,\beta)\,d\sigma=w(\alpha',\beta').$$

Adunque *le funzioni* $u(\xi,\eta,\zeta)$, $v(\xi,\eta,\zeta)$, $w(\xi,\eta,\zeta)$ *nei punti del campo finito* S *soddisfano alle equazioni dell'equilibrio* (1) *del Cap. I e nei punti di* σ *coincidono con le funzioni arbitrariamente date* $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$; esse quindi risolvono il *problema interno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie.*

Problema esterno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie.

4. Siano date tre funzioni finite e continue dei punti di σ: $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$. Si considerino i seguenti sistemi di equazioni funzionali:

$$(1)_1 \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = u(\alpha', \beta'), \\ \psi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = v(\alpha', \beta'), \\ \chi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = w(\alpha', \beta'); \end{cases}$$

$$(2)_1 \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \\ \psi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \\ \chi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0; \end{cases}$$

$$(3)_1 \begin{cases} \varphi_1(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \\ \psi_1(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \\ \chi_1(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \end{cases}$$

dei quali sistemi il secondo è il sistema omogeneo corrispondente al sistema $(1)_1$, il sistema $(3)_1$ è il coniugato del sistema $(2)_1$. A questi sistemi di equazioni funzionali sono applicabili i teoremi al § 1 del Capitolo precedente.

Ciò premesso, osserviamo che il sistema $(2)_2$, come risulta dalle formole $(6)''$ al Cap. II, ammette le tre soluzioni linearmente indipendenti:

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi'(\alpha,\beta)=a, & \psi'(\alpha,\beta)=0, & \chi'(\alpha,\beta)=0;\\ \varphi''(\alpha,\beta)=0, & \psi''(\alpha,\beta)=b, & \chi''(\alpha,\beta)=0;\\ \varphi'''(\alpha,\beta)=0, & \psi'''(\alpha,\beta)=0, & \chi'''(\alpha,\beta)=c, \end{cases}$$

con a, b, c costanti arbitrarie; sicchè il sistema $(3)_2$ ammette almeno tre soluzioni finite e continue su σ:

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi'_1(\alpha,\beta),\ \psi'_1(\alpha,\beta),\ \chi'_1(\alpha,\beta);\ \varphi''_1(\alpha,\beta),\ \psi''_1(\alpha,\beta),\ \chi''_1(\alpha,\beta);\\ \varphi'''_1(\alpha,\beta),\ \psi'''_1(\alpha,\beta),\ \chi'''_1(\alpha,\beta), \end{cases}$$

generalmente diverse da zero e linearmente indipendenti.

5. Vogliamo ora dimostrare che *il sistema* $(3)_2$ *non ammette alcuna altra soluzione all' infuori di quelle tre ora segnalate.*

Per questo, cominciamo dal formare con una soluzione qualsiasi $\varphi_1(\alpha,\beta)$, $\psi_1(\alpha,\beta)$, $\chi_1(\alpha,\beta)$ del sistema $(3)_2$ il seguente sistema di strati elastici:

$$(7)\quad \begin{cases} u_1(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\varphi_1(\alpha,\beta).u'd\sigma, \quad v_1(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\varphi_1(\alpha,\beta).u''d\sigma,\\ w_1(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\varphi_1(\alpha,\beta).u'''d\sigma. \end{cases}$$

In forza della continuità su σ delle funzioni $\varphi_1(\alpha,\beta)$, $\psi_1(\alpha,\beta)$, $\chi_1(\alpha,\beta)$ e in virtù delle formole (20) al Cap. II, si ha per le componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ, corrispondenti alla deformazione del mezzo S di componenti $u_1(\xi,\eta,\zeta)$, $v_1(\xi,\eta,\zeta)$, $w_1(\xi,\eta,\zeta)$,

$$\overline{U}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'} U^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=-\varphi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma,$$

$$\overline{V}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'} V^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=-\psi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma,$$

$$\overline{W}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'} W^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=-\chi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)\,d\sigma;$$

e quindi, in virtù delle $(3)_1$, si avrà su tutta la superficie σ:

$$\overline{U}^{(1)}_\sigma(\alpha,\beta)=0\,,\quad \overline{V}^{(1)}_\sigma(\alpha,\beta)=0\,,\quad \overline{W}^{(1)}_\sigma(\alpha,\beta)=0\,.$$

Di qui, in forza del risultato 2° al § 7 del Cap. I, segue:

$$(\text{in tutto S})\quad u_1(\xi,\eta,\zeta)=a_1\,,\quad v_1(\xi,\eta,\zeta)=b_1\,,\quad w_1(\xi,\eta,\zeta)=c_1$$

con a_1, b_1, c_1 quantità costanti.

6. Dimostriamo che *queste costanti non possono essere tutte e tre nulle*. Infatti se fosse $a_1=b_1=c_1=0$, il sistema (7) di strati elastici avrebbe valori nulli nei punti di σ; e quindi considerato nel campo infinito S', in virtù del risultato 3° al § 8 del Cap. I, ci darebbe:

$$(\text{in tutto S}')\qquad u_1(\xi,\eta,\zeta)=v_1(\xi,\eta,\zeta)=w_1(\xi,\eta,\zeta)=0\,;$$

ed ancora si avrebbe per le componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ, facendo uso delle (20)' al Capitolo II,

$$0=\overline{\overline{U}}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}U^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\varphi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)d\sigma\,,$$

$$0=\overline{\overline{V}}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}V^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\psi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)d\sigma\,,$$

$$0=\overline{\overline{W}}^{(1)}_\sigma(\alpha',\beta')=\lim_{P=p'}W^{(1)}(\xi,\eta,\zeta)'=\chi_1(\alpha',\beta')+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha',\beta';\alpha,\beta).\varphi_1(\alpha,\beta)d\sigma.$$

Dalle quali, in virtù delle $(3)_1$, risulterebbe:

$$(\text{nei punti di }\sigma)\quad \varphi_1(\alpha,\beta)=0\,,\quad \psi_1(\alpha,\beta)=0\,,\quad \chi_1(\alpha,\beta)=0$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

7. Ciò premesso, indichiamo con a'_1, b'_1, c'_1; a''_1, b''_1, c''_1; a'''_1, b'''_1, c'''_1 i tre sistemi di valori costanti (analoghi al sistema a_1, b_1, c_1) che prendono nei punti di S i tre sistemi di strati

elastici costruiti con le tre soluzioni (6) del sistema di equazioni $(3)_2$, e dimostriamo che *il determinante:*

$$D = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \\ a'''_1 & b'''_1 & c'''_1 \end{vmatrix}$$

è diverso dallo zero.

Infatti se fosse $D = 0$, si potrebbero determinare tre costanti h_1, h_2, h_3 tali che:

$$h_1 a'_1 + h_2 a''_1 + h_3 a'''_1 = 0 ,$$
$$h_1 b'_1 + h_2 b''_1 + h_3 b'''_1 = 0 ,$$
$$h_1 c'_1 + h_2 c''_1 + h_3 c'''_1 = 0 .$$

Allora, posto:

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = h_1 \varphi'_1(\alpha, \beta) + h_2 \varphi''_1(\alpha, \beta) + h_3 \varphi'''_1(\alpha, \beta) ,$$
$$\psi_2(\alpha, \beta) = h_1 \psi'_1(\alpha, \beta) + h_2 \psi''_1(\alpha, \beta) + h_3 \psi'''_1(\alpha, \beta) ,$$
$$\chi_2(\alpha, \beta) = h_1 \chi'_1(\alpha, \beta) + h_2 \chi''_1(\alpha, \beta) + h_3 \chi'''_1(\alpha, \beta) ,$$

e formato con questo nuovo sistema di soluzioni delle equazioni $(3)_2$ il sistema di strati elastici:

$$u_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi_2(\alpha,\beta).u' d\sigma , \quad v_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi_2(\alpha,\beta).u'' d\sigma ,$$

$$w_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\varphi_2(\alpha,\beta).u''' d\sigma ,$$

si avrebbe nei punti di σ:

$$u_2(\xi, \eta, \zeta) = a_2 = h_1 a'_1 + h_2 a''_1 + h_3 a'''_1 = 0 ,$$
$$v_2(\xi, \eta, \zeta) = b_2 = h_1 b'_1 + h_2 b''_1 + h_3 b'''_1 = 0 ,$$
$$w_2(\xi, \eta, \zeta) = c_2 = h_1 c'_1 + h_2 c''_1 + h_3 c'''_1 = 0 ,$$

e quindi risulterebbe, come al § 6,

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = 0 , \quad \psi_2(\alpha, \beta) = 0 , \quad \chi_2(\alpha, \beta) = 0 .$$

Ossia le soluzioni (6) del sistema $(3)_2$ non sarebbero, contra-

riamente all'ipotesi fatta, tre soluzioni generalmente diverse da zero e linearmente indipendenti.

8. Premessi i precedenti risultati, *indichiamo con* $\varphi_1(\alpha, \beta)$, $\psi_1(\alpha, \beta)$, $\chi_1(\alpha, \beta)$ *una qualsiasi soluzione del sistema* $(3)_1$ e consideriamo le corrispondenti costanti a_1, b_1, c_1, introdotte al § 5.

Determiniano tre costanti k_1, k_2, k_3 tali che si abbia:

$$(8) \qquad \begin{cases} k_1 a'_1 + k_2 a''_1 + k_3 a'''_1 = a_1 , \\ k_1 b'_1 + k_2 b''_1 + k_3 b'''_1 = b_1 , \\ k_1 c'_1 + k_2 c''_1 + k_3 c'''_1 = c_1 . \end{cases}$$

Questa determinazione è possibile, perchè, come fu dimostrato al § precedente, il determinante D dei coefficienti è diverso da zero. Allora si considerino le tre funzioni dei punti di σ:

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = \varphi_1(\alpha, \beta) - k_1 \varphi'_1(\alpha, \beta) - k_2 \varphi''_1(\alpha, \beta) - k_3 \varphi'''_1(\alpha, \beta) ,$$

$$\psi_2(\alpha, \beta) = \psi_1(\alpha, \beta) - k_1 \psi'_1(\alpha, \beta) - k_2 \psi''_1(\alpha, \beta) - k_3 \psi'''_1(\alpha, \beta) ,$$

$$\chi_2(\alpha, \beta) = \chi_1(\alpha, \beta) - k_1 \chi'_1(\alpha, \beta) - k_2 \chi''_1(\alpha, \beta) - k_3 \chi'''_1(\alpha, \beta) .$$

Evidentemente queste funzioni formano una soluzione del sistema $(3)_1$; e se indichiamo con a_2, b_2, c_2 le costanti corrispondenti, analoghe alle a_1, b_1, c_1 introdotte al § 5, si avrà:

$$a_2 = a_1 - k_1 a'_1 - k_2 a''_1 - k_3 a'''_1 ,$$

$$b_2 = b_1 - k_1 b'_1 - k_2 b''_1 - k_3 b'''_1 ,$$

$$c_2 = c_1 - k_1 c'_1 - k_2 c''_1 - k_3 c'''_1 ,$$

e in virtù delle (8): $a_2 = b_2 = c_2 = 0$; di modo che, ragionando come al § 6, seguirà:

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = 0 , \quad \psi_2(\alpha, \beta) = 0 , \quad \chi_2(\alpha, \beta) = 0 ,$$

ossia *risulterà nei punti di* σ:

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = k_1 \varphi'_1(\alpha, \beta) + k_2 \varphi''_1(\alpha, \beta) + k_3 \varphi'''_1(\alpha, \beta),$$

$$\psi_1(\alpha, \beta) = k_1 \psi'_1(\alpha, \beta) + k_2 \psi''_1(\alpha, \beta) + k_3 \psi'''_1(\alpha, \beta),$$

$$\chi_1(\alpha, \beta) = k_1 \chi'_1(\alpha, \beta) + k_2 \chi''_1(\alpha, \beta) + k_3 \chi'''_1(\alpha, \beta),$$

ciò che dimostra il teorema enunciato al § 5.

9. Poichè il sistema $(3)_1$ ammette le sole tre soluzioni (6), avremo, in virtù del teorema 1° al § 1 del Capitolo precedente, che il sistema di equazioni $(2)_1$ ammette le sole tre soluzioni (5) linearmente indipendenti, e in virtù del teorema 3° al § 1 dello stesso Capitolo, che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il sistema di equazioni $(1)_1$ ammetta una soluzione, è che le funzioni date $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ verifichino le relazioni:

$$(9)\quad \begin{cases} \int_\sigma \{\varphi'_1(\alpha,\beta) \, . \, u(\alpha,\beta) + \psi'_1(\alpha,\beta) \, . \, v(\alpha,\beta) + \chi'_1(\alpha,\beta) \, . \, w(\alpha,\beta)\} \, d\sigma = \\ \qquad = \int_\sigma \Sigma \, \varphi'_1(\alpha, \beta) \, . \, u(\alpha, \beta) \, d\sigma = 0, \\ \int_\sigma \{\varphi''_1(\alpha,\beta) \, . \, u(\alpha,\beta) + \psi''_1(\alpha,\beta) \, . \, v(\alpha,\beta) + \chi''_1(\alpha,\beta) \, . \, w(\alpha,\beta)\} \, d\sigma = \\ \qquad = \int_\sigma \Sigma \, \varphi''_1(\alpha, \beta) \, . \, u(\alpha, \beta) \, d\sigma = 0, \\ \int_\sigma \{\varphi'''_1(\alpha,\beta) \, . \, u(\alpha,\beta) + \psi'''_1(\alpha,\beta) \, . \, v(\alpha,\beta) + \chi'''_1(\alpha,\beta) \, . \, w(\alpha,\beta)\} \, d\sigma = \\ \qquad = \int_\sigma \Sigma \, \varphi'''_1(\alpha,\beta) \, . \, u(\alpha,\beta) \, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Supponiamo dapprima che le funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ soddisfino alle condizioni (9). Allora esisterà una soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ delle equazioni $(1)_1$. Formiamo con tale soluzione il seguente sistema di pseudo-doppii strati elastici:

$$(10)\quad \begin{cases} u(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X'_\sigma \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma, \\ v(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X''_\sigma \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma, \\ w(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \, X'''_\sigma \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma. \end{cases}$$

In virtù della continuità delle funzioni $\phi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo S', avremo, facendo uso delle formole (16)' al Cap. II e delle equazioni $(1)_2$,

$$\lim_{P=p'} u(\xi,\eta,\zeta)=\phi(\alpha',\beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta') \, . \, \phi(\alpha,\beta)\, d\sigma = u(\alpha',\beta'),$$

$$\lim_{P=p'} v(\xi,\eta,\zeta)=\psi(\alpha',\beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta') \, . \, \phi(\alpha,\beta)\, d\sigma = v(\alpha',\beta'),$$

$$\lim_{P=p'} w(\xi,\eta,\zeta)=\chi(\alpha',\beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta') \, . \, \phi(\alpha,\beta)\, d\sigma = w(\alpha',\beta').$$

Adunque *le funzioni* $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$, $w(\xi, \eta, \zeta)$ *nei punti del campo infinito* S' *soddisfano alle equazioni* (1) *del Cap. I, a distanza infinita si annullano, e nei punti di* σ *coincidono con le funzioni arbitrariamente date* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$; esse quindi risolvono il *problema esterno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superfice*, nel caso in cui questi spostamenti soddisfano alle condizioni (9).

10. Nel caso in cui le funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ non soddisfano alle condizioni (9), si consideri un punto P_1 arbitrario nell'interno del campo finito S e si indichi con r_1 il vettore che parte da questo punto P_1 e va al punto variabile $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ del campo infinito S'. Poniamo poi:

$$(11)\begin{cases} u'_1(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\xi^2}, \quad v'_1(\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\xi\,\partial\eta}, \\ \qquad w'_1(\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\xi\,\partial\zeta}, \\ u''_1(\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\eta\,\partial\xi}, \quad v''_1(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\eta^2}, \\ \qquad w''_1(\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\eta\,\partial\zeta}, \\ u'''_1(\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\zeta\,\partial\xi}, \quad v'''_1(\xi,\eta,\zeta)=-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\zeta\,\partial\eta}, \\ \qquad w'''_1(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_1}{\partial\zeta^2}; \end{cases}$$

$$
(12)\quad \begin{cases}
\overline{u}(\alpha,\beta) = u(\alpha,\beta) + h_1 u'_1(\alpha,\beta) + h_2 u''_1(\alpha,\beta) + h_3 u'''_1(\alpha,\beta)\,, \\
\overline{v}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta) + h_1 v'_1(\alpha,\beta) + h_2 v''_1(\alpha,\beta) + h_3 v'''_1(\alpha,\beta)\,, \\
\overline{w}(\alpha,\beta) = w(\alpha,\beta) + h_1 w'_1(\alpha,\beta) + h_2 w''_1(\alpha,\beta) + h_3 w'''_1(\alpha,\beta)\,,
\end{cases}
$$

dove $u'_1(\alpha,\beta)$, $v'_1(\alpha,\beta)$, $w'_1(\alpha,\beta)$, $u''_1(\alpha,\beta)$... indicano i valori delle funzioni (11) nei punti $P \equiv (\xi, \eta, \zeta) \equiv (\alpha, \beta)$ di σ, e dove h_1, h_2, h_3 sono tre costanti pel momento indeterminate. Determiniamo queste costanti in modo che le funzioni $\overline{u}(\alpha, \beta)$, $\overline{v}(\alpha, \beta)$, $\overline{w}(\alpha, \beta)$ soddisfacciano alle condizioni (9), ossia in modo che si abbia:

$$
(13)\quad \begin{cases}
\int_\sigma \Sigma\, \varphi'_1(\alpha,\beta) \,.\, u(\alpha,\beta)\, d\sigma + h_1 \int_\sigma \Sigma\, \varphi'_1(\alpha,\beta) \,.\, u'_1(\alpha,\beta)\, d\sigma + \\
\quad + h_2 \int_\sigma \Sigma\, \varphi'_1(\alpha,\beta) . u''_1(\alpha,\beta)\, d\sigma + h_3 \int_\sigma \Sigma\, \varphi'_1(\alpha,\beta) . u'''_1(\alpha,\beta)\, d\sigma = 0\,, \\
\int_\sigma \Sigma\, \varphi''_1(\alpha,\beta) \,.\, u(\alpha,\beta)\, d\sigma + h_1 \int_\sigma \Sigma\, \varphi''_1(\alpha,\beta) \,.\, u'_1(\alpha,\beta)\, d\sigma + \\
\quad + h_2 \int_\sigma \Sigma\, \varphi''_1(\alpha,\beta) . u''_1(\alpha,\beta)\, d\sigma + h_3 \int_\sigma \Sigma\, \varphi''_1(\alpha,\beta) . u'''_1(\alpha,\beta)\, d\sigma = 0\,, \\
\int_\sigma \Sigma\, \varphi'''_1(\alpha,\beta) \,.\, u(\alpha,\beta)\, d\sigma + h_1 \int_\sigma \Sigma\, \varphi'''_1(\alpha,\beta) \,.\, u'_1(\alpha,\beta)\, d\sigma + \\
\quad + h_2 \int_\sigma \Sigma\, \varphi'''_1(\alpha,\beta) . u''_1(\alpha,\beta)\, d\sigma + h_3 \int_\sigma \Sigma\, \varphi'''_1(\alpha,\beta) . u'''_1(\alpha,\beta)\, d\sigma = 0\,.
\end{cases}
$$

Questa determinazione è sempre possibile, perchè il determinante dei coefficienti di h_1, h_2, h_3 nelle equazioni (13) è diverso da zero. Infatti esso è uguale al determinante D del § 7 moltiplicato per $(2\pi)^3$ [1]).

Fatta nel modo anzidetto la determinazione delle costanti h_1, h_2, h_3, si considerino le equazioni funzionali $(1)_1$ nelle quali siano scritte le funzioni $\overline{u}(\alpha, \beta)$, $\overline{v}(\alpha, \beta)$, $\overline{w}(\alpha, \beta)$ in luogo delle $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$. In virtù delle (13), queste equazioni ammettono certamente una soluzione $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, che sarà finita e continua. Si formi con questa solu-

1) Similmente al § 8 del capitolo precedente per dimostrare, come ivi fu fatto, che l'*integrale* $\int_\sigma \Phi_1(\alpha, \beta) \frac{d\sigma}{r_1}$ *è diverso da zero*, bastava osservare che esso integrale è uguale a $2\pi C_1$, dove C_1 indica la costante introdotta al § 7 di quel capitolo.

zione un sistema di pseudo-doppii strati elastici $\overline{u}(\xi,\eta,\zeta)$, $\overline{v}(\xi,\eta,\zeta)$, $\overline{w}(\xi,\eta,\zeta)$, analogo al sistema (10), e si considerino nei punti del campo infinito S' le funzioni:

$$(14)\quad \begin{cases} u(\xi,\eta,\zeta)=\overline{u}(\xi,\eta,\zeta)-h_1 u'_1(\xi,\eta,\zeta)-h_2 u''_1(\xi,\eta,\zeta)-h_3 u'''_1(\xi,\eta,\zeta)\,, \\ v(\xi,\eta,\zeta)=\overline{v}(\xi,\eta,\zeta)-h_1 v'_1(\xi,\eta,\zeta)-h_2 v''_1(\xi,\eta,\zeta)-h_3 v'''_1(\xi,\eta,\zeta)\,, \\ w(\xi,\eta,\zeta)=\overline{w}(\xi,\eta,\zeta)-h_1 w'_1(\xi,\eta,\zeta)-h_2 w''_1(\xi,\eta,\zeta)-h_3 w'''_1(\xi,\eta,\zeta)\,. \end{cases}$$

Si ha, come al § 9, in virtù delle (12),

$$\lim_{P=p'} u(\xi,\eta,\zeta)=\varphi(\alpha',\beta')-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,.\,\varphi(\alpha,\beta)\,d\sigma-$$

$$-h_1 u'_1(\alpha',\beta')-h_2 u''_1(\alpha',\beta')-h_3 u'''_1(\alpha',\beta')=$$

$$=\overline{u}(\alpha',\beta')-h_1 u'_1(\alpha',\beta')-h_2 u''_1(\alpha',\beta')-h_3 u'''_1(\alpha',\beta')=u(\alpha',\beta'),$$

$$\lim_{P=p'} v(\xi,\eta,\zeta)=\psi(\alpha',\beta')-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,.\,\varphi(\alpha,\beta)\,d\sigma-$$

$$-h_1 v'_1(\alpha',\beta')-h_2 v''_1(\alpha',\beta')-h_3 v'''_1(\alpha',\beta')=$$

$$=\overline{v}(\alpha',\beta')-h_1 v'_1(\alpha',\beta')-h_2 v''_1(\alpha',\beta')-h_3 v'''_1(\alpha',\beta')=v(\alpha',\beta'),$$

$$\lim_{P=p'} w(\xi,\eta,\zeta)=\chi(\alpha',\beta')-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,.\,\varphi(\alpha,\beta)\,d\sigma-$$

$$-h_1 w'_1(\alpha',\beta')-h_2 w''_1(\alpha',\beta')-h_3 w'''_1(\alpha',\beta')=$$

$$=\overline{w}(\alpha',\beta')-h_1 w'_1(\alpha',\beta')-h_2 w''_1(\alpha',\beta')-h_3 w'''_1(\alpha'\beta')=w(\alpha'\beta').$$

Adunque *le funzioni* $u(\xi,\eta,\zeta)$, $v(\xi,\eta,\zeta)$, $w(\xi,\eta,\zeta)$ *date dalle formole* (14), *soddisfano nei punti del campo infinito* S' *alle equazioni* (1) *del Cap. I, a distanza infinita si annullano e nei punti di* σ *coincidono con le funzioni arbitrariamente date* $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$; esse quindi risolvono il *problema esterno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie*, nel caso in cui questi spostamenti non verificano le condizioni (9).

Problema interno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie.

11. Siano date tre funzioni $\lambda(\alpha, \beta)$, $\mu(\alpha, \beta)$, $\nu(\alpha, \beta)$ finite e continue su tutta la superficie σ e tali che si abbia:

$$\int_\sigma \lambda(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \quad \int_\sigma \mu(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \quad \int_\sigma \nu(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,. \tag{15}$$

Queste condizioni sono necessarie, se si vuole che le date funzioni possano rappresentare i valori delle componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ corrispondenti ad una deformazione del campo finito S (Cfr. Cap. I, § 10).

Consideriamo le equazioni funzionali:

$$(1)_3 \quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \lambda(\alpha', \beta')\,, \\ \psi(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \mu(\alpha' \beta')\,, \\ \chi(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \nu(\alpha', \beta')\,; \end{cases}$$

$$(2)_3 \quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \psi(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \chi(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,; \end{cases}$$

$$(3)_3 \quad \begin{cases} \varphi_1(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \psi_1(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \chi_1(\alpha', \beta') - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\, X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,. \end{cases}$$

I sistemi $(2)_3$, $(3)_3$ coincidono rispettivamente con i sistemi $(3)_1$, $(2)_1$ del § 4; per cui essi ammettono ciascuno tre soluzioni linearmente indipendenti e tre solamente (§§ 5 e 9). In particolare il sistema $(3)_3$ ammette (§ 4) le tre sole soluzioni:

$$\begin{array}{lll} \varphi'_1(\alpha,\beta)=a\,, & \psi'_1(\alpha,\beta)=0\,, & \chi'_1(\alpha,\beta)=0\,; \\ \varphi''_1(\alpha,\beta)=0\,, & \psi''_1(\alpha,\beta)=b\,, & \chi''_1(\alpha,\beta)=0\,; \\ \varphi'''_1(\alpha,\beta)=0\,, & \psi'''_1(\alpha,\beta)=0\,, & \chi'''_1(\alpha,\beta)=c\,; \end{array}$$

per cui, in virtù del teorema 3° al § 1 del Capitolo precedente, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di equazioni $(1)_3$ ammetta una soluzione è che le funzioni date $\lambda(\alpha,\beta)$, $\mu(\alpha,\beta)$, $\nu(\alpha,\beta)$ verifichino le condizioni:

$$\int_\sigma \Sigma\,\varphi'_1(\alpha,\beta)\,.\,\lambda(\alpha,\beta)\,d\sigma = a\int_\sigma \lambda(\alpha,\beta)\,d\sigma = 0\,,$$

$$\int_\sigma \Sigma\,\varphi''_1(\alpha,\beta)\,.\,\lambda(\alpha,\beta)\,d\sigma = b\int_\sigma \mu(\alpha,\beta)\,d\sigma = 0\,,$$

$$\int_\sigma \Sigma\,\varphi'''_1(\alpha,\beta)\,.\,\lambda(\alpha,\beta)\,d\sigma = c\int_\sigma \nu(\alpha,\beta)\,d\sigma = 0\,.$$

Ora in virtù delle (15) queste condizioni sono verificate; per cui il sistema $(1)_3$ ammette una soluzione finita e continua $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$.

Formiamo con questa soluzione il seguente sistema di strati elastici:

$$(16)\quad \begin{cases} u(\xi,\eta,\zeta) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,\varphi(\alpha,\beta)\,.\,u'\,d\sigma + a_1\,, \\ v(\xi,\eta,\zeta) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,\varphi(\alpha,\beta)\,.\,u''\,d\sigma + b_1\,, \\ w(\xi,\eta,\zeta) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,\varphi(\alpha,\beta)\,.\,u'''\,d\sigma + c_1\,, \end{cases}$$

con a_1, b_1, c_1 costanti arbitrarie. In virtù della continuità delle funzioni $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$, dalle formole (20) al Cap. II e dalle equazioni $(1)_3$ si avrà per le componenti delle pseudo-

tensioni nei punti di σ, corrispondenti alla deformazione (16) del mezzo S,

$$\overline{U}_\sigma (\alpha' \beta') = \lim_{P=p'} U(\xi, \eta, \zeta)' =$$

$$= \varphi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma X'_\sigma (\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \lambda(\alpha', \beta'),$$

$$\overline{V}_\sigma (\alpha' \beta') = \lim_{P=p'} V(\xi, \eta, \zeta)' =$$

$$= \psi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma X''_\sigma (\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \mu(\alpha', \beta'),$$

$$\overline{W}_\sigma (\alpha', \beta') = \lim_{P=p'} W(\xi, \eta, \zeta)' =$$

$$= \chi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma X'''_\sigma (\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \nu(\alpha', \beta').$$

Adunque *le funzioni* (16), *che contengono ciascuna una costante additiva arbitraria, soddisfano nei punti di* S *alle equazioni* (1) *del Cap. I, e i valori delle componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di* σ *coincidono con i valori delle funzioni date* $\lambda(\alpha, \beta)$, $\mu(\alpha, \beta)$, $\nu(\alpha, \beta)$; esse quindi risolvono il *problema interno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie.*

Problema esterno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie.

12. Date ad arbitrio tre funzioni finite e continue dei punti di σ: $\lambda(\alpha, \beta)$, $\mu(\alpha, \beta)$, $\nu(\alpha, \beta)$, si formino le equazioni funzionali:

$$(1)_1 \quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma (\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \lambda(\alpha', \beta'), \\ \psi(\alpha', \beta') + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma (\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \mu(\alpha', \beta'), \\ \chi(\alpha', \beta') + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma (\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \, . \, \varphi(\alpha, \beta) \, d\sigma = \nu(\alpha', \beta'); \end{cases}$$

$$(2)_4 \quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \psi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \chi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha' \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,; \end{cases}$$

$$(3)_4 \quad \begin{cases} \varphi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \psi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,, \\ \chi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0\,. \end{cases}$$

I sistemi $(2)_4$ e $(3)_4$ coincidono rispettivamente con i sistemi $(3)_1$, $(2)_1$ del § 1; sicchè essi non ammettono soluzione alcuna (§ 2); e quindi, in virtù del teorema 2° al § 1 del Capitolo precedente, il sistema $(1)_4$ ammette una soluzione finita e continua $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ ed una solamente.

Formiamo con questa soluzione il sistema di strati elastici:

$$(16)' \quad \begin{cases} u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, \varphi(\alpha, \beta) \,.\, u'\, d\sigma\,, \\ v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, \varphi(\alpha, \beta) \,.\, u''\, d\sigma\,, \\ w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma\, \varphi(\alpha, \beta) \,.\, u'''\, d\sigma\,. \end{cases}$$

In virtù della continuità delle funzioni $\varphi(\alpha, \beta)$. $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, dalle formole $(20)'$ al Cap. II e dalle equazioni $(1)_4$ si ha per le componenti (mutate di segno) delle pseudo-tensioni nei punti di σ, corrispondenti alla deformazione $(16)'$ del mezzo infinito S',

$$\overline{\overline{\overline{U}}}_\sigma(\alpha', \beta') = \lim_{P=p'} U(\xi, \eta, \zeta)' =$$

$$= \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \lambda(\alpha', \beta'),$$

$$\overline{\overline{\overline{V}}}_\sigma(\alpha', \beta') = \lim_{P=p'} V(\xi, \eta, \zeta)' =$$

$$= \psi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \mu(\alpha', \beta'),$$

$$\overline{\overline{\overline{W}}}_\sigma(\alpha', \beta') = \lim_{P=p'} W(\xi, \eta, \zeta)' =$$

$$= \chi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \,.\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma = \nu(\alpha', \beta').$$

Adunque *le funzioni* (16)' *soddisfano nei punti del campo infinito* S' *alle equazioni* (1) *del Cap. I, a distanza infinita si annullano, e i valori delle componenti* (mutate di segno) *delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ coincidono con i valori delle funzioni date* $\lambda(\alpha, \beta)$, $\mu(\alpha, \beta)$, $\nu(\alpha, \beta)$; esse quindi risolvono il *problema esterno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie.*

Osservazione I. — I risultati del presente Capitolo valgono per $k > -\frac{2}{3}$, perchè per tali valori di k abbiamo dimostrato i risultati 1°, 2°, 3° e 4° ai §§ 7 e 8 del Cap. I, dei quali si è fatto uso precedentemente. Per altro i detti valori di k comprendono in particolare i casi di isotropia elastica.

Osservazione II. — Al punto in cui siamo arrivati non presenta più alcuna difficoltà l'estensione all'elasticità dei risultati sulle funzioni armoniche e sulle funzioni potenziali stabilite ai §§ 11, 12,.... del Capitolo precedente. In particolare si possono nuovamente risolvere i *problemi interno ed esterno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie,* estendendo il metodo col quale al § 17 del Capitolo precedente si sono risoluti i *problemi derivati di Dirichlet.*

Catania, 2 Febbraio 1907.

INTORNO ALL' INFLUENZA DEL VENTO SULLA QUANTITÀ DI PIOGGIA RACCOLTA DAI PLUVIOMETRI.

ANTONINO LO SURDO.

1. — Per spiegare le differenze fra le quantità di precipitazioni raccolte da pluviometri posti a differenti altezze, si attribuisce al vento un' azione nel senso di far diminuire la quantità di precipitazioni che entrano in un pluviometro [1]).

Tale effetto, secondo Jevons, che fu il primo a pensare a quest'azione, sarebbe dovuto al fatto che una parte delle precipitazioni, che continuando a cadere nella direzione resa obliqua dal vento entrerebbe nel pluviometro, in vicinanza della bocca di questo, per un aumento di velocità che si determina negli strati contigui ad un ostacolo esposto al vento, viene spinta al di là, e quindi non viene da esso raccolta.

Esperienze per la conferma di un' azione del vento, furono fatte dallo stesso Jevons [2]), in condizioni però diverse da quelle in cui si trovano gli ordinari pluviometri; da Wild [3]) e da Nipher [4]) con pluviometri circondati da ripari contro il vento.

2. — Sembrandomi interessante mettere in evidenza l'influenza del vento in condizioni speciali per osservarla, ho fatto costruire un apparecchio, mediante il quale si poteva raccogliere la pioggia con pluviometri in movimento, e separatamente, secondochè il movimento avveniva in direzione non molto diversa da quella del vento, e nello stesso senso, o in senso contrario, o anche in altre direzioni.

1) W. S. Jevons. (Phylos. Magazine, 12, p. 421); Dines. (Zeitschr. der Oesterreich. Gesellsch. für Meteorologie, 12, p. 382; Chrimes. (Zeitschr. der Oesterreich. Gesellsch. für Meteorologie, 14, p. 225); Rogers Field. (Symons 's montly meteorological Magazine, Aug. 1878, p. 99).

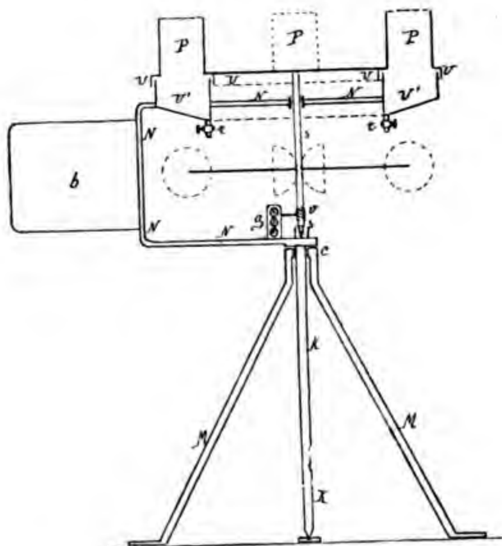
2) Jevons, (loc. cit.).

3) H. Wild. (Rep. f. Met. B. 9, N. 9.

4) Nipher. (Zeitschr. der Osterreich. Gesellsch. für Meteorologie, 14, 250).

Col movimento nello stesso senso diminuendo la velocità relativa [1]), deve diminuire l' influenza del vento sulla quantità di pioggia raccolta.

L' apparecchio è rappresentato in sezione nella fig. 1. All' asse S di un' ordinario anemometro è collegata una *doccia* U a corona circolare, sulla quale sono fissati in uno stesso



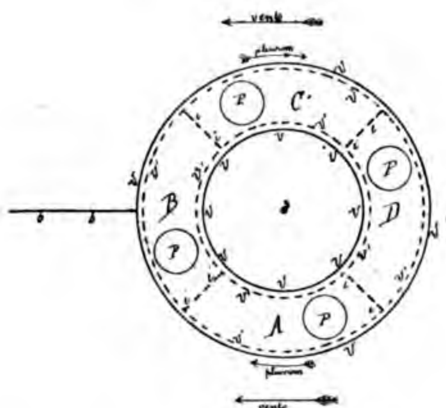
piano orizzontale quattro eguali pluviometri cilindrici P senza fondo. Essi sono disposti circolarmente su due diametri perpendicolari (fig. 2).

La pioggia raccolta dai pluviometri cade in un'altra doccia U' concentrica alla prima e trovantesi al disotto, ma che, all' opposto della U, ha i bordi rivolti verso l'alto.

Questa è divisa mediante le pareti *i* disposte radialmente in 4 scompartimenti eguali A, B, C, D; ed è sostenuta da un telaio N, girevole intorno allo stesso asse *s* dell'anemometro, ma indipendentemente da questo per mezzo dell' asta K, la

1) Supponendo che il pluviometro non assuma una velocità più grande di quella del vento.

quale appoggia in basso su una punta d'acciaio, ed è trattenuta in alto col treppiedi M dal cuscinetto *c*.



Il telaio N e con esso la doccia U', si orienta col vento per mezzo della banderuola *b*, ed in tal modo, che i due scompartimenti A e C si trovano sotto i pluviometri mentre questi ruotano sotto l'azione del vento, descrivendo archi di 90°, le cui corde hanno la stessa direzione di questo; però il movimento avviene nello stesso senso del vento sopra di A; in senso contrario sopra di C. Le corde degli archi descritti dai vari punti dei pluviometri sopra B e D sono perpendicolari alla direzione del vento.

Ogni scompartimento è munito di opportuno rubinetto di scarico *r*. Il contagiri *g*, mosso dalla vite *v* sull'asse dell'anemometro, indica i giri fatti da questo.

Per quel che si è detto prima risulta che quando l'apparecchio è esposto alla pioggia con vento, nello scompartimento A, deve raccogliersi una maggior quantità di pioggia che negli altri, e specialmente che in C.

3. — Un modello dell'apparecchio descritto fu costruito nel Gabinetto di Fisica della R. Università di Modena.

Il treppiedi M alto circa 80 cm., l'asta K, ed il telaio N, si costruirono di ferro; le due doccie, i pluviometri, e la ban-

dieruola, di lastra di zinco. L'asta dell'anemometro formata di un leggero tubo d'acciaio, terminava in basso con una punta d'acciaio che poggiava su un'incavatura conica scavata in un pezzo pure d'acciaio; la punta e questo pezzo restavano immersi nell'olio contenuto in un pozzetto fissato opportunamente.

L'asse dell'anemometro in alto era sostenuto libero di girare con lieve attrito, entro una scatola contenente delle sferette d'acciaio, fissata al telaio N. L'altezza totale dell'apparecchio dalla base del treppiedi era di m. 1.40.

I centri di due semisfere dell'anemometro, diametralmente opposte, distavano di cm. 60, e ad ugual distanza si trovavano gli assi di due pluviometri diametralmente opposti.

I vasi pluviometrici cilindrici avevano il diametro della base di cm. 12, e altezza di cm. 15.

4. — L'apparecchio fu impiantato, sollevato dal suolo di circa 1 metro, nella parte centrale dell'Orto della R. Stazione Agraria di Modena, e si fecero le osservazioni nelle pioggie di Aprile, Maggio e Giugno, 1906. Durante queste pioggie si ebbero sempre dei venti non molto forti, e inoltre, come ebbi modo di constatare, esse erano costituite da precipitazioni non molto sottili.

I risultati sono riportati nella tabella seguente dove le quantità di pioggia sono espresse in centesimi della quantità raccolta nello scompartimento A. Le velocità medie del vento durante ogni pioggia, le quali si conoscevano soltanto in modo approssimativo, sono espresse secondo la Scala di Beaufort.

Pioggie		Quantità raccolte negli scompartimenti				Velocità media del vento
		A	B	C	D	(Scala di Beaufort)
I	27-28 Aprile	100	98	82	98	2
II	18 Maggio	100	93	86	98	2
III	9-10 Giugno	100	90	79	71	2
IV	12 Giugno	100	84	—[1])	80	4
V	13 Giugno	100	92	79	93	3
VI	19 Giugno	100	100	92	94	3

5. — Dai risultati sopra esposti si rileva che in A, cioè in quello scompartimento sopra il quale i pluviometri nel loro movimento avevano la maggiore componente media di velocità nella direzione e nello stesso senso del vento, è stata raccolta sempre la massima quantità di pioggia confermando così quanto s'era previsto.

6. — Le condizioni ideali sarebbero state quelle di un pluviometro muoventesi con velocità eguale in grandezza direzione e senso a quella del vento; sarebbe stato allora molto interessante stabilire misure di confronto con pluviometri ordinari, sperimentando a diverse altezze. Queste condizioni però evidentemente non erano raggiunte coll'apparecchio dianzi descritto.

Difatti basterà accennare che sopra A i pluviometri trascinati dall'anemometro, si muovevano con velocità più piccola di quella del vento, e non esattamente nella stessa direzione. Se alcuni punti dei pluviometri avessero avuto anche una velocità nel moto circolare eguale in grandezza, alla velocità v del vento, sopra di A la componente di questa velocità nella direzione del vento, avrebbe avuto un valore variabile tra un minimo $\frac{\sqrt{2}}{2} . v$, e un massimo v.

1) Il rubinetto dello scompartimento C durante la IV, rimase inavvertentemente aperto.

Inoltre, aumentando la velocità del vento e la sottigliezza delle precipitazioni la quantità di pioggia raccolta da un pluviometro mentre esso si trova sopra uno scompartimento e lasciatacadere nello scompartimento successivo, aumenta.

Quindi ho ritenuto superfluo continuare le osservazioni, essendo del resto sufficienti per lo scopo prefissomi quelle riportate.

Sono grato ai professori Chistoni e Magnanini, per aver messo a mia disposizione i mezzi dell' Istituto fisico della R. Università di Modena, ed al prof. Cugini, Direttore della R. Stazione Agraria, per l' ospitalità concessami.

Istituto di Fisica Terrestre — R. Università di Napoli.

SULLA RADIOATTIVITÀ DEI PRODOTTI GASSOSI ETNEI.

Dott. C. BELLIA.

In questi ultimi anni molti Fisici hanno riconosciuto che i gas estratti dalle acque di sorgente specialmente dalle sorgenti termali, dal petrolio bruto, ecc. contengono un'emanazione attiva della stessa natura di quella del radio.

Però, a quanto io sappia, nessuno ha studiato la radioattività dei gas emanati da un grande vulcano, e perciò ho creduto non privo d'interesse studiare l'attività dei prodotti gassosi dell'Etna, ed ho esaminato sia i gas emessi dalle fumarole, sia quelli emessi da una delle manifestazioni vulcaniche secondarie del perimetro dell'Etna, che presentano il fenomeno delle salse, quale la Salinella di Paternò.

Ho adoperato l'elettroscopio a campana di Elster e Geitel la cui capacità era di 1,4 unità elettrostatiche assolute, la capacità della campana di sei litri; esso, data la debole radioattività dei prodotti esaminati, s'è prestato molto bene a questo studio.

Radioattività dei gas delle fumarole. — I primi saggi di radioattività sono stati eseguiti all'Osservatorio Etneo dove nell'agosto dello scorso anno 1906 per cortesia del Direttore Prof. Riccò ho potuto dimorare qualche giorno e dove ho eseguito nello stesso tempo alcune misure di dispersione elettrica [1]).

I diversi campioni di gas che ho esaminato sono stati tutti prelevati dalla grande fumarola che si trova a N E a poca distanza dall'Osservatorio Etneo (2940 m. sul livello del mare); essa è una grande buca che emette continuamente, come tutti i fumaiuoli acquosi, dell'aria calda un pochino disossigenata carica di abbondanti vapori acquosi.

1) Bollettino dell'Acc. Gioenia di Catania, 1907.

Per raccogliere i gas vuotavo una bottiglia di tre litri piena di acqua nell'interno della fumarola, allora la bottiglia si riempiva dell'aria emessa. Introducevo i gas così raccolti nella campana dell'elettroscopio facendoli passare attraverso un tubo a cloruro di calcio per spogliarli del vapore acqueo, e misuravo la dispersione prodotta.

Per due campioni di gas esaminati subito dopo raccolti ho osservato, dopo sei minuti che il gas era stato introdotto nella campana, rispettivamente la dispersione di 72 e 67 volta all'ora, cioè una dispersione media di 70 volta all'ora. Si vede che i gas emanati da questa fumarola sono pochissimo radioattivi giacchè la dispersione osservata è solo quattro volte superiore di quella che si otteneva quando la campana era piena di aria. Ciò non deve parere strano perchè anche gli altri prodotti vulcanici, lave, ceneri, lapilli, sia dell'Etna [1]), sia del Vesuvio [2]), sono pochissimo radioattivi.

Per vedere la natura dell'emanazione contenuta in questi gas ho studiato a Catania la legge di decremento dell'attività presentata da un campione di gas raccolto dal Custode dell'Osservatorio Etneo nella maniera che ho indicato. Ho rivolto le maggiori cure ad ottenere la chiusura ermetica dell'apparecchio onde evitare le fughe dell'emanazione. Per questo la campana era ben masticiata dove poggiava sulla base dell'elettroscopio, e la sonda con cui caricavo il dispersore si muoveva con una disposizione che assicurava la perfetta tenuta.

Nella tabella seguente riporto i valori della dispersione nei tempi successivi, dove t rappresenta il tempo in ore misurato a partire dall'istante in cui il gas venne introdotto nella campana, I la dispersione in volta per ora.

1) G. Trovato Castorina. Boll. dell'Acc. Gioenia di Catania, 1905.
2) Nasini e Levi. Rend. dell'Acc. dei Lincei, 2° sem. 1906.

t	I	$\frac{1}{\lambda}$
0,15	37,8	
0,55	45,0	
1,15	45,6	
1,85	45,6	
2,50	43,8	
7,25	40,2	
51,25	33,0	800.000
67,90	29,4	522.000
97,75	22,8	423.000
118,00	19,2	429.000

In sulle prime, come si osserva anche nella figura, la dispersione aumenta rapidamente, aumento da attribuirsi alla

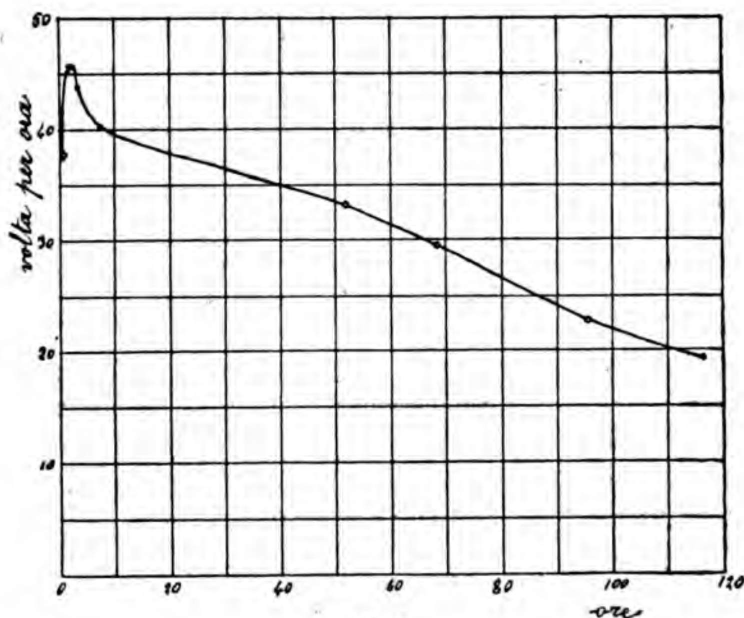


Fig. 1.

radioattività indotta nelle pareti dell'apparecchio, e raggiunge il massimo dopo circa un'ora e mezza, indi succede il lento decremento dovuto alla graduale e spontanea dissipazione dell'emanazione.

Considerando quest'ultimo periodo si vede che la dispersione si riduce a metà in poco più di quattro giorni e decresce seguendo la nota legge esponenziale

$$I = I_0 e^{-\lambda t} .$$

Ho determinato i valori della costante $\frac{1}{\lambda}$ per quattro intervalli di tempo consecutivi prendendo come unità di tempo il secondo, il loro valore medio è di 543.000 prossimo al valore di 497,000 trovato da Curie [1]) per l'emanazione del radio. Veramente il valore di $\frac{1}{\lambda}$ non si mostra molto costante, ma credo che ciò sia dovuto ad errori di osservazione, che data la debolissima radioattività dei gas esaminati si fanno sentire maggiormente.

Non ho potuto fare altre determinazioni per le difficoltà che si incontrano nel raccogliere i gas, ma da questa esperienza si può dedurre che molto probabilmente i gas svolti dalle fumarole dell'Etna (almeno da quella studiata) contengono, sebbene in piccola quantità, un'emanazione della stessa natura di quella del radio.

Radioattività dei gas della Salinella di Paternò. — Essa è nota sin da epoca antichissima, dista 22 chilometri in linea retta dal cratere centrale, e si manifesta come un piano argilloso da cui qua e là scaturiscono piccole quantità di acqua salata e fangosa e si sviluppano delle bolle di gas che gorgogliano nell'acqua.

I gas si sviluppano alla temperatura ordinaria, le analisi di Ch. Sainte-Claire Deville [2]) nel 1856, di Fouqué [3]) nel 1865

1) Comptes Rendus. 1° sem. 1902, pag. 445.
2) Comptes Rendus. 2° sem. 1856, pag. 359.
3) Comptes Rendus. 2° sem. 1865, pag. 421.

e di Silvestri [1]) durante l'eruzione di fango del 1866 indicano che sono costituiti quasi totalmente di anidride carbonica.

Riferisco i risultati dell'analisi di Fouquè perchè la più recente di quelle fatte in condizioni normali:

Acido carbonico	96,35
Ossigeno	0,58
Azoto	2,94
Idrogeno protocarbonato	1,12
Idrogeno	0,50
	100,49

I campioni di gas sono stati raccolti per spostamento d'acqua adoperando l'acqua stessa della Salinella, che essendo già satura di gas non esercitava nessun assorbimento.

Ho studiato sia la legge con cui decresce la loro attività, sia la radioattività indotta in fili metallici.

Per determinare la legge di decremento dell'attività del gas ne introducevo tre litri nell'apparecchio che chiudevo ermeticamente e misuravo di tempo in tempo la dispersione. I risultati ottenuti per due campioni di gas raccolti in epoche diverse sono registrati nella tabella seguente. In essa l'età indica il tempo trascorso dall'istante in cui il gas venne raccolto a quello in cui venne introdotto nella campana; t, I e $\frac{1}{\lambda}$ sono le notazioni della tabella precedente.

Si vede che appena il gas veniva introdotto nella campana la dispersione cresceva rapidamente per la radioattività indotta e arrivava al massimo, a differenza dei gas della fumarola, dopo 2,75 ore, il valore massimo ottenuto è 1,55 volte più grande di quello che si ha dopo 0,1 ore.

1) Nuovo Cimento. 1865-66, pag. 225.

Inoltre, aumentando la velocità del vento e la sottigliezza delle precipitazioni la quantità di pioggia raccolta da un pluviometro mentre esso si trova sopra uno scompartimento e lasciatacadere nello scompartimento successivo, aumenta.

Quindi ho ritenuto superfluo continuare le osservazioni, essendo del resto sufficienti per lo scopo prefissomi quelle riportate.

Sono grato ai professori Chistoni e Magnanini, per aver messo a mia disposizione i mezzi dell'Istituto fisico della R. Università di Modena, ed al prof. Cugini, Direttore della R. Stazione Agraria, per l'ospitalità concessami.

Istituto di Fisica Terrestre — R. Università di Napoli.

SULLA RADIOATTIVITÀ DEI PRODOTTI GASSOSI ETNEI.

Dott. C. BELLIA.

In questi ultimi anni molti Fisici hanno riconosciuto che i gas estratti dalle acque di sorgente specialmente dalle sorgenti termali, dal petrolio bruto, ecc. contengono un'emanazione attiva della stessa natura di quella del radio.

Però, a quanto io sappia, nessuno ha studiato la radioattività dei gas emanati da un grande vulcano, e perciò ho creduto non privo d'interesse studiare l'attività dei prodotti gassosi dell'Etna, ed ho esaminato sia i gas emessi dalle fumarole, sia quelli emessi da una delle manifestazioni vulcaniche secondarie del perimetro dell'Etna, che presentano il fenomeno delle salse, quale la Salinella di Paternò.

Ho adoperato l'elettroscopio a campana di Elster e Geitel la cui capacità era di 1,4 unità elettrostatiche assolute, la capacità della campana di sei litri; esso, data la debole radioattività dei prodotti esaminati, s'è prestato molto bene a questo studio.

Radioattività dei gas delle fumarole. — I primi saggi di radioattività sono stati eseguiti all'Osservatorio Etneo dove nell'agosto dello scorso anno 1906 per cortesia del Direttore Prof. Riccò ho potuto dimorare qualche giorno e dove ho eseguito nello stesso tempo alcune misure di dispersione elettrica [1]).

I diversi campioni di gas che ho esaminato sono stati tutti prelevati dalla grande fumarola che si trova a N E a poca distanza dall'Osservatorio Etneo (2940 m. sul livello del mare); essa è una grande buca che emette continuamente, come tutti i fumaiuoli acquosi, dell'aria calda un pochino disossigenata carica di abbondanti vapori acquosi.

1) Bollettino dell'Acc. Gioenia di Catania, 1907.

Per raccogliere i gas vuotavo una bottiglia di tre litri piena di acqua nell'interno della fumarola, allora la bottiglia si riempiva dell'aria emessa. Introducevo i gas così raccolti nella campana dell'elettroscopio facendoli passare attraverso un tubo a cloruro di calcio per spogliarli del vapore acqueo, e misuravo la dispersione prodotta.

Per due campioni di gas esaminati subito dopo raccolti ho osservato, dopo sei minuti che il gas era stato introdotto nella campana, rispettivamente la dispersione di 72 e 67 volta all'ora, cioè una dispersione media di 70 volta all'ora. Si vede che i gas emanati da questa fumarola sono pochissimo radioattivi giacchè la dispersione osservata è solo quattro volte superiore di quella che si otteneva quando la campana era piena di aria. Ciò non deve parere strano perchè anche gli altri prodotti vulcanici, lave, ceneri, lapilli, sia dell'Etna [1]), sia del Vesuvio [2]), sono pochissimo radioattivi.

Per vedere la natura dell'emanazione contenuta in questi gas ho studiato a Catania la legge di decremento dell'attività presentata da un campione di gas raccolto dal Custode dell'Osservatorio Etneo nella maniera che ho indicato. Ho rivolto le maggiori cure ad ottenere la chiusura ermetica dell'apparecchio onde evitare le fughe dell'emanazione. Per questo la campana era ben masticiata dove poggiava sulla base dell'elettroscopio, e la sonda con cui caricavo il dispersore si muoveva con una disposizione che assicurava la perfetta tenuta.

Nella tabella seguente riporto i valori della dispersione nei tempi successivi, dove t rappresenta il tempo in ore misurato a partire dall'istante in cui il gas venne introdotto nella campana, I la dispersione in volta per ora.

1) G. Trovato Castorina. Boll. dell'Acc. Gioenia di Catania, 1905.
2) Nasini e Levi. Rend. dell'Acc. dei Lincei, 2° sem. 1906.

t	i	$\frac{1}{\lambda}$
0,15	37,8	
0,55	45,0	
1,15	45,6	
1,85	45,6	
2,50	43,8	
7,25	40,2	
51,25	33,0	800.000
67,90	29,4	522.000
97,75	22,8	423.000
118,00	19,2	429.000

In sulle prime, come si osserva anche nella figura, la dispersione aumenta rapidamente, aumento da attribuirsi alla

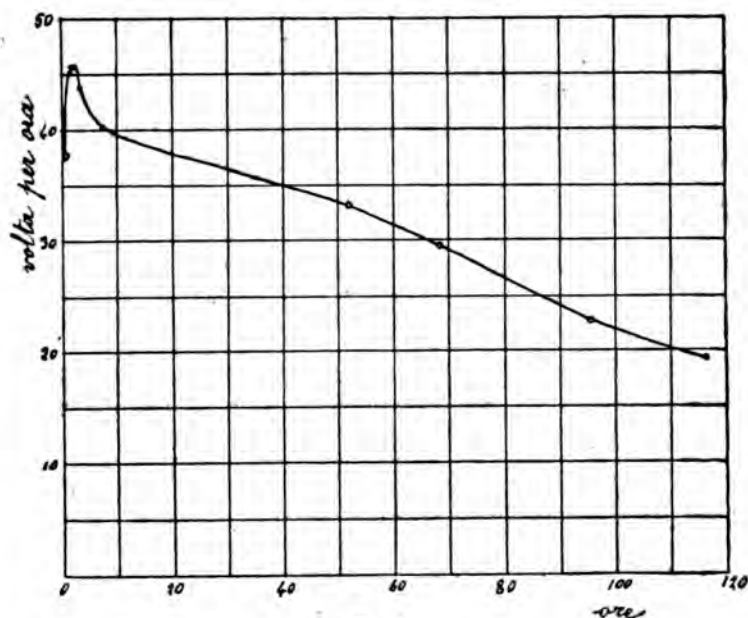


Fig. 1.

radioattività indotta nelle pareti dell'apparecchio, e raggiunge il massimo dopo circa un'ora e mezza, indi succede il lento decremento dovuto alla graduale e spontanea dissipazione dell'emanazione.

Considerando quest'ultimo periodo si vede che la dispersione si riduce a metà in poco più di quattro giorni e decresce seguendo la nota legge esponenziale

$$I = I_0 e^{-\lambda t} .$$

Ho determinato i valori della costante $\frac{1}{\lambda}$ per quattro intervalli di tempo consecutivi prendendo come unità di tempo il secondo, il loro valore medio è di 543.000 prossimo al valore di 497,000 trovato da Curie [1]) per l'emanazione del radio. Veramente il valore di $\frac{1}{\lambda}$ non si mostra molto costante, ma credo che ciò sia dovuto ad errori di osservazione, che data la debolissima radioattività dei gas esaminati si fanno sentire maggiormente.

Non ho potuto fare altre determinazioni per le difficoltà che si incontrano nel raccogliere i gas, ma da questa esperienza si può dedurre che molto probabilmente i gas svolti dalle fumarole dell'Etna (almeno da quella studiata) contengono, sebbene in piccola quantità, un'emanazione della stessa natura di quella del radio.

Radioattività dei gas della Salinella di Paternò. — Essa è nota sin da epoca antichissima, dista 22 chilometri in linea retta dal cratere centrale, e si manifesta come un piano argilloso da cui qua e là scaturiscono piccole quantità di acqua salata e fangosa e si sviluppano delle bolle di gas che gorgogliano nell'acqua.

I gas si sviluppano alla temperatura ordinaria, le analisi di Ch. Sainte-Claire Deville [2]) nel 1856, di Fouqué [3]) nel 1865

1) Comptes Rendus. 1° sem. 1902, pag. 445.
2) Comptes Rendus. 2° sem. 1856, pag. 859.
3) Comptes Rendus. 2° sem. 1865, pag. 421.

e di Silvestri [1]) durante l'eruzione di fango del 1866 indicano che sono costituiti quasi totalmente di anidride carbonica.

Riferisco i risultati dell'analisi di Fouqué perchè la più recente di quelle fatte in condizioni normali:

Acido carbonico	96,35
Ossigeno	0,58
Azoto	2,94
Idrogeno protocarbonato	1,12
Idrogeno	0,50
	100,49

I campioni di gas sono stati raccolti per spostamento d'acqua adoperando l'acqua stessa della Salinella, che essendo già satura di gas non esercitava nessun assorbimento.

Ho studiato sia la legge con cui decresce la loro attività, sia la radioattività indotta in fili metallici.

Per determinare la legge di decremento dell'attività del gas ne introducevo tre litri nell'apparecchio che chiudevo ermeticamente e misuravo di tempo in tempo la dispersione. I risultati ottenuti per due campioni di gas raccolti in epoche diverse sono registrati nella tabella seguente. In essa l'età indica il tempo trascorso dall'istante in cui il gas venne raccolto a quello in cui venne introdotto nella campana; t, I e $\frac{1}{\lambda}$ sono le notazioni della tabella precedente.

Si vede che appena il gas veniva introdotto nella campana la dispersione cresceva rapidamente per la radioattività indotta e arrivava al massimo, a differenza dei gas della fumarola, dopo 2,75 ore, il valore massimo ottenuto è 1,55 volte più grande di quello che si ha dopo 0,1 ore.

1) Nuovo Cimento. 1865-66, pag. 225.

Età 265 ore		
t	I	$\frac{1}{\lambda}$
0,1	185,3	
0,5	226,3	
1,4	260,5	
2,0	276,9	
2,7	280,8	
10,5	267,0	
24,5	240,0	472,000
58,0	187,9	493,000
72,0	168,4	460,000
82,5	155,7	482,000
96,5	141,4	523,000
107,0	129,4	426,000
120,0	118,5	532,000
Media di $\frac{1}{\lambda} = 484.000$		
La radiazione diventa metà in giorni 3,87		

Età 101 ore		
t	I	$\frac{1}{\lambda}$
0,1	338,8	
0,5	408,5	
1,1	460,8	
2,0	505,2	
2,8	533,3	
26,7	443,8	469,000
50,4	370,2	471,000
74,1	315,4	532,000
98,6	262,4	479,000
121,8	213,3	404,000
Media di $\frac{1}{\lambda} = 471.000$		
La radiazione diventa metà in giorni 3,78		

Dopo raggiunto il massimo comincia il lento decremento seguendo la nota legge

$$I = I_0 e^{-\lambda t} .$$

I valori singoli di $\frac{1}{\lambda}$, quantunque oscillano un poco, sono abbastanza concordanti per ritenere che la radiazione diminuisce col tempo secondo una legge esponenziale, ciò si vede anche bene dalla rappresentazione grafica dei risultati: prendendo come ascisse i tempi e come ordinate i logaritmi di I si ottengono con buona approssimazione delle linee rette e parallele.

I valori medi di $\frac{1}{\lambda}$ sono compresi fra 463.000 trovato da Rutherford e Soddy [1]) e 497.000 trovato da Curie per l'ema-

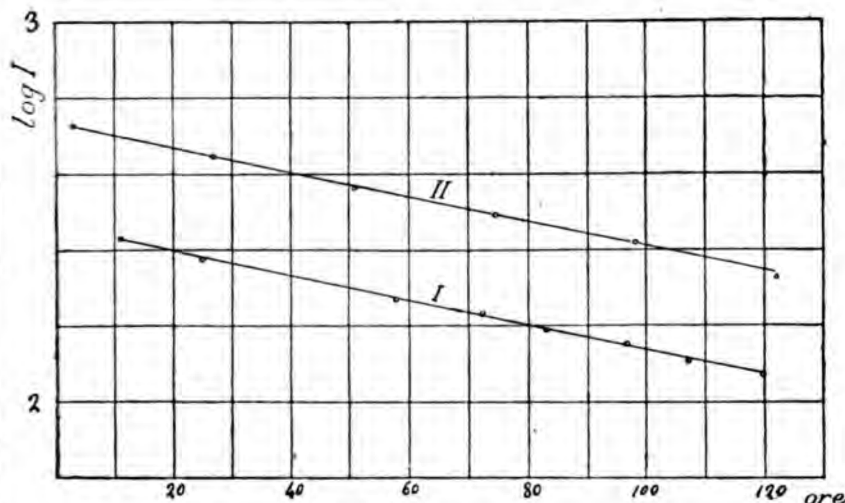


Fig. 2.

nazione del radio, quindi si può ritenere che l'attività dei gas della Salinella di Paternò sia dovuta ad un' emanazione della stessa natura di quella del radio.

Lo stesso risultato si ottiene dallo studio della radioattività indotta. Per questo ho adoperato sempre un filo di rame avvolto a spirale della lunghezza di 140 cm. che per radioattivarlo ho immerso in un recipiente contenente quattro litri di gas. Il filo in queste condizioni non ha assunto mai una grande attività, anche portandolo a un forte potenziale negativo, tanto che la sua attività dopo 80 minuti era appena misurabile.

I risultati sono riportati nella tabella dove I rappresenta la dispersione osservata in volta per minuto, I' invece quella calcolata con la formola

$$I' = I'_0 \left\{ -(k-1)\, e^{-bt} + k\, e^{-ct} \right\}$$

1) Philos. Mag. Aprile 1903, pag. 445.

stabilita da Curie e Danne [1]) per i corpi radioattivati nell'emanazione del radio quando prendevo per I'_0 un valore conveniente.

Età 4 giorni			Età 3 giorni			Età 1 giorno		
Esposizione 20 ore			Esposizione 16 ore			Esposizione 2.2 ore a — 13,000 volta		
tempo in minuti	I	I'	tempo in minuti	I	I'	tempo in minuti	I	I'
4	0,69	0,54	8	0,38	0,20	5	0,30	0,23
19	0,47	0,47	17	0,33	0,19	13	0,29	0,22
31	0,40	0,45	33	0,17	0,16	24	0,19	0,19
49	0,34	0,32	50	0,13	0,12	35	0,17	0,17
70	0,24	0,22	61	0,10	0,10	44	0,15	0,15
87	0,16	0,16	82	0,05	0,07	60	0,11	0,11
						76	0,08	0,08

Si vede che a prescindere dai primi minuti si ha un buon accordo fra i valori osservati e quelli calcolati, nei primi 20 minuti i valori osservati sono notevolmente più grandi di quelli calcolati, ciò è da attribuirsi al fatto che la formola di Curie e Danne rappresenta bene i risultati quando la durata dell'esposizione nel gas supera le 24 ore, mentre è in difetto nei primi minuti per durate inferiori.

Per confrontare fra loro le radioattività dei gas della Salinella e della fumarola dell'Etna ho calcolato la dispersione che si osserverebbe dopo sei minuti dell'introduzione nella campana del gas della Salinella raccolto di fresco. Ho adoperato la formola

$$I_0 = I\, e^{\lambda t}$$

dove t rappresenta l'età del gas in secondi, allora se I rappresenta la dispersione a 0,1 ore data dalla 2ª tavola, I_0 rap-

1) Comptes Rendus. 1° sem. 1904, pag. 638.

presenterà la dispersione che si osserverebbe a 0,1 ore introducendo il gas nell'apparecchio subito dopo raccolto.

A questa maniera ho ottenuto per I_0 rispettivamente per i due campioni di gas esaminati i valori 1373 e 744 volta all'ora (la differenza più che ad errori di osservazioni è da attribuirsi ad una diversa radioattività dei gas studiati), il loro valore medio è perciò di 1058 volta all' ora cioè una dispersione per litro di gas di 353 volta.

Con tre litri di gas della fumarola dell'Etna ho osservato invece a 0,1 ore e con lo stesso apparecchio la dispersione di 70 volta all'ora. Però i gas della fumarola sono stati esaminati a quasi 3000 metri cioè alla pressione di 540 mm. mentre quelli della Salinella a 760 mm., ma tre litri di gas a 540 mm. equivalgono a $3\frac{540}{760}=2,13$ litri a 760 mm., quindi per i gas della fumarola si ha una dispersione per litro di 33 volta all'ora.

Si vede che i gas della Salinella sono ben 11 volte più radioattivi di quelli dell'Etna. Del resto anche per i materiali solidi si ha un rapporto analogo: la radioattività dei fanghi della Salinella è dello stesso ordine di grandezza di quello delle terre vegetali mentre quella di alcuni campioni di lave che ho esaminato è da 8 a 20 volte più piccola.

Se si considera poi che i gas dell'Etna provengono da una profondità di parecchi chilometri mentre quelli della Salinella da meno di due, si deve dedurre che i prodotti vulcanici sono tanto meno radioattivi quanto maggiore è la profondità da cui provengono. Ciò è d'accordo con le idee dello Strutt [1], che per spiegare il gradiente di temperatura quale si osserva alla superficie terrestre deve ammettere che la quantità di radio esistente sulla terra sia distribuita in un piccolo strato della crosta terrestre.



Tutte le esperienze sono state eseguite dopo un certo tempo che i gas furono raccolti, e perciò in condizioni da non

1) Proc. Roy. Soc. Serie A., vol. 77, pag. 472.

poter trovare la presenza di emanazione tipo torio o attinio estinguentesi rapidamente.

Per tale ricerca sarebbero state necessarie delle esperienze sul posto che ho intenzione di eseguir in seguito, però alcune esperienze preliminari di radioattività indotta hanno avuto esito nevativo. Ho incanalato i gas emessi da uno dei vulcanetti della Salinella di Paternò in un tubo di vetro contenente dei fili metallici, i quali così vennero esposti per due ore e mezzo all' azione dei gas immediatamente dopo che si sviluppavano, e cioè in modo che l' emanazione tipo torio che essi potessero contenere non avrebbe il tempo di distruggersi.

I fili esaminati dopo tre ore (quando cioè era del tutto svanita la debole radioattività indotta dovuta all' emanazione del radio) non hanno presentato traccia apprezzabile di attività, mentre dovevano presentarla se i gas avessero contenuto emanazione tipo torio giacchè l' attività indotta dovuta ad essa svanisce lentamente.



Per definire la quantità di emanazione di radio contenuta nei gas l'ho paragonata con quella sviluppata in un dato tempo da una soluzione titolata di bromuro di radio puro.

Per lo scopo ho adoperato una soluzione di circa 3 cc. con g. 0,00005 di bromuro di radio puro contenuta in una piccola ampolla che la riempiva per circa $\frac{2}{3}$.

Facevo soggiornare l' ampolla in un grande recipiente chiuso per un certo tempo, per es. 5 minuti, allora l'aria contenuta nel recipiente si caricava della quantità di emanazione sviluppata dalla soluzione in 5 minuti. Per eliminare l'errore dovuto all' emanazione trattenuta dentro l' ampolla e per stabilire un certo regime permanente, ho avuto cura di introdurre l' ampolla in un primo recipiente per 5 minuti, immediatamente dopo in un secondo recipiente eguale al primo e per lo stesso tempo, indi nel primo dopo averlo sbarazzato accuratamente dell' emanazione che conteneva, e così successivamente. Dopo aver fatto quest' operazione un certo numero di volte utilizzavo l'aria contenuta in uno di questi recipienti;

aspettavo il tempo necessario affinchè l'emanazione si distribuisse uniformemente nell'aria del recipiente e introducevo una piccola quantità, ma determinata, di quest'aria nella campana dell'apparecchio per studiarne la dispersione.

Nella tabella seguente riporto i risultati di tre misure:

Quantità di emanaz. 1,73		Quantità di emanaz. 0,574		Quantità di emanaz. 1,034	
t	I	*t*	I	*t*	I
0,05	6870	0,05	2100	0,05	4110
0,1	7000	0,1	2320	0,1	4500
0,2	7560	0,35	2650	0,5	4910
0,7	8400	0,75	2907	0,9	5400
1,9	10216	1,7	3360	2,8	6300
2,8	10800	3,1	3530	3,0	6300
Dispersione prodotta dall'unità di emanaz. a 0,1 ore. 4040 volta all'ora		Dispersione prodotta dall'unità di emanaz. a 0,1 ore 4040 volta all'ora		Dispersione prodotta dall'unità di emanaz. a 0,1 ore. 4350 volta all'ora	

Come unità di emanazione ho preso quella sviluppata in un secondo da una soluzione contenente un milligrammo di bromuro di radio puro: siccome lo sviluppo dell'emanazione è proporzionale al tempo e alla massa del radio così potevo calcolare la quantità di emanazione introdotta ogni volta nell'apparecchio.

In media si vede che l'unità di emanazione produce, dopo 0,1 ore che è stata introdotta nell'apparecchio, la dispersione di 4140 volta all'ora.

Si deduce quindi che un litro di gas emesso dalla Salinella di Paternò, che a 0,1 ore produce la dispersione di 353 volta all'ora, contiene tanta emanazione quanta ne sviluppa un milligrammo di bromuro di radio puro in un dodicesimo di secondo; e un litro di gas emesso dalla fumarola dell'Etna, che a 0,1 produce la dispersione di 33 volta all'ora, ne con-

tiene quanta ne sviluppa un milligrammo di bromuro di radio in un centoventicinquesimo di secondo.

Quantità piccolissime di emanazione sono quindi contenute nei prodotti gassosi etnei, sono dello stesso ordine di grandezza di quelle contenute nei gas meno attivi esaminati da Curie e Laborde [1]).

Se si ammette che i gas svolti dal cratere centrale contengono la stessa percentuale di emanazione che contengono i gas della fumarola studiata, tutta l'emanazione mandata via continuamente dall'Etna è eguale a quella sviluppata solamente da qualche grammo di bromuro di radio.

Laboratorio di Fisica della R. Università di Catania,
Maggio 1907.

---

1) Comptes Rendus. 1° sem. 1906, pag. 1462.

SUL MOTO SPONTANEO DI UN SOLIDO DI RIVOLUZIONE, VINCOLATO PER UN PUNTO DELL'ASSE AD UN CERCHIO FISSO.

Memoria 1ª di E. DANIELE.

Introduzione.

Nelle ricerche sulla Dinamica di un sistema invariabile i vincoli, che ordinariamente s'intendono imposti al sistema, si riducono a classi molto limitate; se poi, in particolare, consideriamo quei vincoli che hanno per effetto di restringere la libertà di un punto determinato del corpo in movimento, vediamo che le ricerche classiche portano quasi esclusivamente sul caso in cui il punto sia fisso: più raramente, il punto è assoggettato a rimanere su una superficie [1]), che di solito è un piano. Una trattazione larga, e condotta da un punto di vista generale, di casi che differiscano, in riguardo ai vincoli, da quelli ora accennati non si saprebbe facilmente trovare.

Ragione non ultima di questa lacuna può essere il complesso di difficoltà gravi che introduce, nello studio del movimento, l'ipotesi di vincoli diversi da quelli comunemente considerati. Che tali difficoltà esistano effettivamente lo prova il tentativo, contenuto in questa Memoria, per scoprire alcune proprietà del movimento di un solido di cui un punto sia legato ad una linea piana assegnata.

A prima vista non parrebbe che un tale vincolo dovesse dare luogo a difficoltà eccezionali. Si pensi al movimento di un solido pesante nel quale un punto P determinato sia astretto a muoversi in un piano orizzontale: se il solido è di rotazione intorno all'asse contenente il punto P ed il baricentro G, il problema del movimento si riconduce facilmente alle quadrature iperellittiche [2]). D'altra parte è noto che un solido della

1) Cfr. Poisson, Traité de Mécanique, II, Ch. VI; — Routh, Die Dynam. d. Systeme starrer Körper, II, Kap. V; — Klein u. Sommerfeld, Theorie des Kreisel; Kap. VI, § 10; Kap. VII, § 3 e segg.; — Maggi, Stereodinamica, §§ 16 e segg., 69.

2) Poisson, l. c.; — Klein-Sommerfeld, op. cit., Kap. VI.

natura ora indicata, nel quale il punto P sia fisso, compie intorno a P un movimento che si sa rappresentare mediante funzioni ellittiche. Il caso in cui il punto P debba descrivere una linea piana si può in certo qual modo concepire come intermedio fra i due precedenti; si è quindi facilmente indotti, se non si riflette altro, a credere che le difficoltà presentate dal relativo problema d'integrazione siano press'a poco del medesimo ordine che negli altri due problemi. Le cose invece vanno in modo ben diverso; pur considerando, come ho fatto in questo lavoro, il caso speciale di un solido sul quale non agiscano forze, non sembra tanto facile la via che deve condurre alle quadrature: l'esame delle equazioni differenziali scritte in base all'espressione (2) (v. § 1° della Mem.) della forza viva induce in questa persuasione. La cosa veramente è spiegabile a priori. Per non parlare del caso in cui il punto P è fisso, perchè allora non vi è da occuparsi che della rotazione del solido intorno a P, nell'altro problema, che corrisponde a supporre P mobile in un piano orizzontale, si possono subito scrivere due integrali del baricentro relativi a due direzioni orizzontali perpendicolari fra di loro; dopo di che le equazioni del movimento permettono di studiare separatamente il moto della proiezione orizzontale G' del baricentro G e il moto del solido rispetto a G' considerato come fisso. Passando all'ipotesi che il punto P sia vincolato ad una linea (tolto il caso specialissimo che la linea sia una retta) vengono a mancare gli integrali del baricentro, e quindi svanisce la possibilità di scindere il problema in due più semplici, dei quali uno consistente nello studiare il movimento del solido intorno ad un punto fisso. Si comprende bene come debba complicarsi lo studio del movimento complessivo del solido per il fatto che non esiste in questo alcun punto, il cui movimento non reagisca sul moto del solido intorno al punto stesso.

Date le accresciute difficoltà, è abbastanza naturale che in un primo studio del soggetto mi sia imposto quelle semplificazioni che possono sembrare meglio adatte a raggiungere qualche risultato, sia pure molto particolare. Queste semplificazioni sono di due ordini: le une riguardano la natura del sistema meccanico, cioè la forma e la struttura del solido, le

forze applicate e la forma della linea sulla quale è trattenuto il punto P; le altre si riferiscono al genere di problemi che intendo trattare.

Quanto alle prime io suppongo che

a) il solido sia simmetrico rispetto ad un asse passante per P (simmetrico nel senso meccanico, cioè nel senso che l'ellissoide d'inerzia relativo a P sia di rotazione), e che su quest'asse cada il baricentro;

b) sul solido non agiscano forze;

c) la linea descritta dal punto P sia un cerchio.

Come si vede, non era possibile spingersi più oltre, da questo lato, sulla via delle semplificazioni; anche la scelta della linea vincolante il punto P fu fatta intenzionalmente allo scopo di rendere possibile una rotazione del solido intorno ad un asse fisso nello spazio (l'asse del cerchio), e quindi avere un integrale primo evidente. Il sostituire una retta al cerchio non condurrebbe ad una semplificazione maggiore, perchè l'integrale del baricentro, che si verrebbe ad acquistare, non farebbe che sostituire l'integrale di dianzi, che ora va perduto. Così pure non si avrebbe che un insignificante vantaggio nelle formole riducendo ad una sfera l'ellissoide d'inerzia relativo al punto P.

Le equazioni differenziali del movimento sono dedotte nei §§ 1° e 2°. Nel § 1° feci però astrazione dall'ipotesi *c)*, e calcolai la forza viva supponendo che la linea su cui sta il punto P sia qualunque, purchè piana; dopo aver notato la presenza di un integrale primo lineare (per il significato v. n. 3) esaminai subito il caso particolare in cui P coincida col baricentro G. In tali condizioni la forza viva si spezza nella parte che si riferisce al moto di G e in quella relativa al moto del solido intorno a G; anche le equazioni differenziali del movimento si scindono allora in due sistemi riguardanti rispettivamente i due movimenti singoli, e dicono che, mentre G percorre la sua linea con velocità di grandezza costante, il solido ruota intorno a G come se questo fosse fisso. Il risultato poi è valido non soltanto per un solido sferico, ma anche per un corpo di conformazione qualunque.

L'ipotesi *c)* viene ripresa nel § 2°: le equazioni del movimento (A) mostrano allora un secondo integrale primo, altre a quello del § precedente. Tanto l'uno che l'altro contengono una proprietà della coppia di quantità di moto, in relazione, rispettivamente, col movimento del solido intorno a P, oppure col suo movimento assoluto (cioè rispetto a tre assi fissi nello spazio. Quest'ultimo integrale è dovuto all'ipotesi speciale *c)*, e si distingue dall'altro in quanto si può interpretare in modo puramente meccanico, mentre quello ammette anche un'interpretazione cinematica.

Malgrado le specializzazioni fatte e i due integrali primi ottenuti, non è ancora facile vedere per quale via si possa condurre a termine l'integrazione delle equazioni da cui il movimento dipende. Decisi perciò di restringere il campo della ricerca, limitandomi a verificare se il sistema ammetta dei movimenti particolari di natura determinata, precisandone poi, in caso affermativo, i caratteri quantitativi. Nella scelta dei movimenti, di cui si trattava di ricercare la compatibilità col nostro sistema, seguii lo stesso criterio che m'ero già imposto nello specializzare il sistema medesimo: prendere, cioè, in esame un movimento possibilmente semplice. Pensando allora il movimento complessivo del solido decomposto nel moto del punto P sul cerchio e nel moto del solido intorno a P, e lasciando da parte il primo che offre meno interesse, vien naturale di domandarsi se il secondo movimento possa essere una precessione regolare: è questo difatti il moto che si presenta sotto l'aspetto più elementare (astrazione fatta dalla rotazione intorno ad un asse fisso) fra i varii movimenti d'un solido rispetto ad un punto.

Il § 3° contiene la ricerca e la determinazione di questi, che chiamai *moti precessionali* del sistema, almeno nell'ipotesi, del resto ben naturale, che gli assi delle due rotazioni che compongono la precessione siano l'asse di simmetria del solido (o, come brevemente diremo, l'*asse del solido)* e la perpendicolare in P al piano del cerchio su cui sta il punto P. Il risultato ottenuto si può formulare come segue (v. n. 12): *un moto precessionale ha luogo, oltre che nel caso evidente in cui il punto vincolato sia lo stesso baricentro, tutte le*

volte che rimane fisso un punto della retta P G ; *allora il movimento complessivo del solido si riduce ad una precessione regolare.*

Per l'analisi completa dei varii casi che si possono presentare si veggano i nn. 11 e 13 della Memoria.

I §§ rimanenti, 4° e 5°, hanno per iscopo di approfondire la natura dei moti precessionali. Le loro proprietà, che sono contenute nella stessa definizione oppure che da questa seguono immediatamente (come quella della costanza della velocità del punto P), invitano a verificare se si possano classificare fra i movimenti stazionarii del sistema. Effettivamente, se noi assumiamo le coordinate in modo che due di esse siano cicliche (cfr. n. 15), la regola di Routh per la ricerca dei moti stazionarii conduce appunto ai moti precessionali già studiati. A dire il vero, da un primo esame apparirebbe che, per essere stazionarii, occorra imporre a certi moti precessionali una limitazione; ma un'analisi ulteriore mostra poi che ad essi spetta, senza alcuna restrizione, il titolo di moti stazionarii. Questo viene esposto nel § 4°.

Una fra le proprietà più caratteristiche dei movimenti stazionarii dedotti da relazioni integrali qualsiasi consiste notoriamente nel fatto che la loro stabilità od instabilità si può provare con un metodo, semplicissimo nelle sue linee generali, nel quale non occorre altro che la considerazione dell'energia totale : il suo fondamento è l'estensione, fatta da Routh, del teorema di Dirichlet sulla stabilità dell'equilibrio, e il completamento che questo teorema esteso riceve dalle ricerche di Liapounoff, le quali permettono di affermare l'instabilità del movimento tutte le volte che non sono soddisfatte le condizioni per la stabilità [1]). In particolare il metodo ora ricordato si applica ai movimenti stazionarii del § 4°, che provengono da integrali primi dovuti all'esistenza di coordinate cicliche : evidentemente una tale applicazione non poteva essere trascurata, tanto più che l'eventuale scoperta di moti stabili non sarebbe stata priva di un certo interesse, data la grande scar-

1) Cfr. Routh, op. cit., II, Kap. III ; — Levi-Civita, Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico, ecc. (Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1901) ; — Id., Sui moti stazionari dei sistemi olonomi (id., id.).

sità di siffatti movimenti conosciuti nella Dinamica dei sistemi rigidi [1]). Ed il tentativo non è stato inutile, poichè le ricerche del § 5° ci offrono alcuni esempii di moti stabili diversi da quelli già conosciuti: la diversità sta non tanto nel movimento considerato in sè stesso, quanto nella natura delle perturbazioni in cui confronto si fa la verifica della stabilità.

Un saggio di tali moti stabili si ha negli enunciati coi quali terminano i nn. 21 e 23. Nel primo si tratta della rotazione uniforme del solido intorno al suo asse, rotazione che viene riconosciuta stabile rispetto a perturbazioni le quali abbiano anche per effetto di togliere dalla originaria quiete un punto qualunque dell'asse, lanciandolo, con velocità iniziale piccolissima, lungo un cerchio arbitrario.

Nel secondo invece il movimento è una precessione regolare intorno ad un punto Q dell'asse del solido: questa precessione viene riconosciuta stabile od instabile (a seconda dei casi) rispetto a perturbazioni che staccano l'asse precessionale mobile da quello fisso, facendo sì che il punto Q cessi di stare in quiete. Per le precise condizioni alle quali valgono questi teoremi rimando ai numeri citati della Memoria.

A questi casi di stabilità poi se ne può aggiungere un altro, accennato rapidamente al n. 24, la cui diversità da quelli già noti sta pure nel moto considerato in sè stesso: è il movimento che risulta di una rotazione uniforme del solido intorno al proprio asse e di una rotazione uniforme di questo intorno ad una retta ad esso parallela; le perturbazioni nel caso attuale possono deviare l'asse del solido in qualunque direzione, in modo però che rimanga inalterata la traiettoria circolare originariamente descritta dal baricentro.

§ 1°: *Equazioni del movimento nell'ipotesi che il punto vincolato percorra una linea piana qualunque. Caso in cui il punto vincolato è il baricentro.*

1. In tutto questo § faremo astrazione dall'ipotesi che la linea percorsa dal punto P sia un cerchio; supporremo invece

1) Cfr. Levi-Civita, Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky (Rend. Acc. Lincei, 1° sem., 1901).

che sia una linea piana qualunque, e la indicheremo con (γ). Riferiremo il sistema a due terne d'assi ortogonali: una, xyz, fissa nello spazio, l'altra, $\xi\,\eta\,\zeta$, legata invariabilmente col solido. La prima terna sarà scelta in modo che il piano $x\,y$ coincida col piano della curva (γ); quanto alla seconda, porremo la sua origine nel punto P, e assumeremo come asse ζ positivo l'asse del solido diretto positivamente da P verso G: i sensi positivi di ξ e η si determineranno in modo che le due terne $x\,y\,z$ e $\xi\,\eta\,\zeta$ siano direttamente congruenti fra di loro. Notiamo subito che, detta E la distanza P G, sarà sempre $E > 0$.

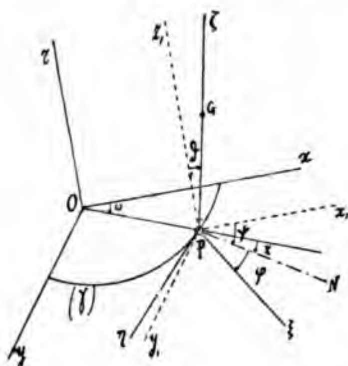


Fig. 1.

Ci occorrerà pure di considerare gli assi coll'origine in P paralleli a $x\,y\,z$: li indicheremo con $x_1\,y_1\,z_1$. L'orientazione, rispetto a questi, degli assi ξ, η, ζ sarà determinata coll'assegnare i tre angoli d'Eulero $\psi\,\varphi\,\vartheta$, chiamando ψ e φ gli angoli che la linea dei nodi N (passante per P) forma rispettivamente con x_1 e ξ, e ϑ l'angolo degli assi z e ζ positivi: gli angoli ψ e φ (in quanto si consideri una determinata posizione del solido) saranno compresi fra 0 e 2π, l'angolo ϑ invece andrà compreso fra 0 e π. Per completare la definizione degli angoli $\psi\,\varphi\,\vartheta$ (per ciò che riguarda i segni) e per le formole che legano questi angoli ai nove coseni direttori veggasi: Klein-Sommerfeld, *Th. des Kreisels*, p. 17-19. Prenderemo poi la tabella dei coseni nella forma seguente:

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

A individuare la posizione del solido nello spazio sceglieremo, oltre agli angoli $\psi \varphi \vartheta$, le coordinate a e b del punto P rispetto agli assi x e y; le a e b saranno legate da una relazione

$$F(a, b) = 0,$$

che è l'equazione della curva (γ).

2. Possiamo scrivere allora l'espressione della forza viva T. Chiamando u, v, w le componenti della velocità di P rispetto a $\xi \eta \zeta$, e p, q, r le componenti della rotazione istantanea del solido rispetto agli stessi assi, ed osservando che deve essere

$$u^2 + v^2 + w^2 = a'^2 + b'^2,$$

abbiamo per la forza viva:

$$2\,T = M(a'^2 + b'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2\,M\,E(u\,q - v\,p);$$

con M intendiamo di indicare la massa del solido, con A il suo momento d'inerzia relativo ad un asse qualunque passante per P e giacente nel piano $\xi \eta$, e con C il suo momento d'inerzia rispetto all'asse ζ.

Le u, v si esprimono mediante a', b' colle formole

$$u = \alpha_1 a' + \beta_1 b', \quad v = \alpha_2 a' + \beta_2 b',$$

ossia, introducendo gli angoli d'Eulero,

$$u = (\cos\psi \cos\varphi - \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta)\,a' + (\operatorname{sen}\psi \cos\varphi + \\ + \cos\psi \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta)\,b'$$

$$v = -(\cos\psi \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi \cos\varphi \cos\vartheta)\,a' + (-\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\varphi + \\ + \cos\psi \cos\varphi \cos\vartheta)\,b';$$

mentre con queste altre formole si esprimono $p\ q\ r$ in funzione di $\psi\ \varphi\ \vartheta$ e loro derivate [1]):

$$(1)\qquad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ q = -\vartheta' \operatorname{sen}\varphi + \psi' \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta . \end{cases}$$

Si ha quindi per 2 T l' espressione seguente:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2\mathrm{T} = \mathrm{M}(a'^2 + b'^2) + \mathrm{A}\vartheta'^2 + (\mathrm{A}\operatorname{sen}^2\vartheta + \mathrm{C}\cos^2\vartheta)\psi'^2 + \\ + \mathrm{C}(\varphi'^2 + 2\psi'\varphi'\cos\vartheta) \\ + 2\mathrm{M}\mathrm{E}\{a'(\vartheta'\operatorname{sen}\psi\cos\vartheta + \psi'\cos\psi\operatorname{sen}\vartheta) + \\ + b'(-\vartheta'\cos\psi\cos\vartheta + \psi'\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\vartheta)\} . \end{aligned}$$

3. Di qui si deducono senz' altro le equazioni del movimento sotto la forma mista di Lagrange; limitandoci alle due relative alle coordinate a e b, abbiamo intanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial a'} &= \mathrm{M}a' + \mathrm{M}\mathrm{E}(\vartheta'\operatorname{sen}\psi\cos\vartheta + \psi'\cos\psi\operatorname{sen}\vartheta) \\ &= \mathrm{M}a' + \mathrm{M}\mathrm{E}\alpha'_3 \\ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial b'} &= \mathrm{M}b' + \mathrm{M}\mathrm{E}\beta'_3 , \\ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial a} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial b} = 0 ; \end{aligned}$$

onde, indicando con λ un moltiplicatore indeterminato, le due equazioni in questione diventano:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}\dfrac{d^2}{dt^2}(a + \mathrm{E}\alpha_3) = \lambda\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} \\ \mathrm{M}\dfrac{d^2}{dt^2}(b + \mathrm{E}\beta_3) = \lambda\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} \end{cases}$$

Se ora si chiamano $x_0\ y_0\ z_0$ le coordinate del baricentro G rispetto agli assi $x\ y\ z$, e $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ le sue coordinate rispetto agli assi $\xi\ \eta\ \zeta$, si ha, osservando che è $\xi_0 = \eta_0 = 0$, $\zeta_0 = \mathrm{E}$:

$$x_0 = a + \mathrm{E}\alpha_3 , \quad y_0 = b + \mathrm{E}\beta_3 .$$

1) V. Klein-Sommerfeld, Th. d. kr., p. 45.

Quindi le equazioni precedenti si possono scrivere:

$$(3') \qquad Mx_0'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial a}, \quad My_0'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial b};$$

se ne deduce che *la proiezione ortogonale di* G *sul piano* xy *si muove in modo che la sua accelerazione è in ogni istante parallela alla normale alla curva* (γ) *nel punto* P.

Osserveremo ancora che, essendo

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0,$$

l'equazione relativa alla coordinata φ si riduce a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0,$$

e quindi porge l'integrale

$$\varphi' + \psi' \cos \vartheta = \text{cost.}$$

il quale dice, per la terza delle (1), che è costante la proiezione ortogonale, sull'asse ζ, della rotazione istantanea del solido intorno al punto P. A definire il movimento si potranno allora assumere, fra le sei incognite $a, b, \psi, \varphi, \vartheta, \lambda$, tre delle cinque equazioni di Lagrange, l'integrale ora trovato, l'integrale della forza viva e l'equazione $F(a, b) = 0$.

4. Senza soffermarci oltre sul caso generale, facciamo l'ipotesi che il punto P sia lo stesso baricentro G; basterà supporre, in quanto precede, $E = 0$. La forza viva si scrive

$$2T = M(a'^2 + b'^2) + A\vartheta'^2 + (A \operatorname{sen}^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 + C(\varphi'^2 + 2\psi'\varphi'\cos\vartheta),$$

mentre le equazioni (3) diventano:

$$(4) \qquad Ma'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial a}, \quad Mb'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial b}.$$

Allora il risultato contenuto nelle (3') si specializza nel senso che lo stesso punto G percorre la curva (γ) in modo che la sua accelerazione è in ogni istante diretta secondo la normale alla

curva stessa. Questo equivale a dire che l' accelerazione tangenziale di G è costantemente nulla, cosa che si ricava anche direttamente dalle (4) moltiplicandole rispettivamente per a', b' e sommandole membro a membro.

Le tre equazioni differenziali poi che si hanno oltre alle (4) non sono altro che le note equazioni del movimento di un solido, non soggetto a forze, intorno ad un punto fisso, nella ipotesi che l' ellissoide d' inerzia relativo a questo punto sia di rivoluzione. D' altra parte le (4) non contengono affatto le coordinate $\psi \varphi \vartheta$, e quindi valgono da sole a definire il moto del punto G lungo (γ). Così le cinque equazioni differenziali del movimento si distinguono nettamente in due gruppi, e a questa distinzione corrisponde la decomposizione del movimento complessivo in due moti più semplici: quello del punto G sulla linea (γ) e quello del solido intorno a G. Il primo si può intendere descritto dalle due equazioni

$$F(a, b) = 0, \quad a'^2 + b'^2 = \text{cost},$$

di cui la seconda dice che la velocità di G è costante in grandezza; ed il calcolo di a e b è ridotto senz'altro alle quadrature, una volta che la $F = 0$ si sia risolta rispetto ad a o a b. Il secondo movimento poi, per l' ipotesi speciale fatta sulla natura del solido, consiste in una precessione regolare risultante di una rotazione uniforme di questo intorno a ζ, e di una rotazione uniforme di ζ intorno ad un altro asse (che può essere qualunque) passante per G.

5. Un semplice sguardo alle formole precedenti fa vedere che il risultato ora ottenuto continua a sussistere quando si ammetta che l' ellissoide d' inerzia relativo a G sia affatto qualunque. Anzi, ci sarà pure lecito supporre che il solido sia pesante, a condizione di ritenere il piano xy orizzontale, poichè allora l' azione della gravità vien distrutta dalla reazione del piano su cui deve mantenersi il baricentro. Abbiamo dunque: *Il moto più generale di un solido pesante, il cui baricentro sia assoggettato a percorrere una linea situata in un piano orizzontale, si può considerare come risultante di un moto uniforme (cioè a velocità di grandezza costante)*

del baricentro lungo la linea, e del moto più generale del solido intorno al baricentro come se questo fosse fisso e sul solido non agissero forze.

§ 2°: *Equazioni del movimento nell' ipotesi che il punto vincolato percorra un cerchio: deduzione di due integrali primi lineari, e loro significato.*

6. Torniamo a supporre che il punto vincolato P sia distinto dal baricentro, e specializziamo invece la linea (γ), supponendo che sia un cerchio di raggio R. Prendendo come origine 0 degli assi $x\,y\,z$ il centro del cerchio, l' equazione F $(a, b) = 0$ diventa

$$a^2 + b^2 = R^2 ,$$

e introducendo l'angolo ω che la retta O P forma coll'asse x, avremo:

$$a = R\cos\omega\,, \quad b = R\,\mathrm{sen}\,\omega\,.$$

L' espressione (2) della forza viva si muta allora in

$$(5)\quad \begin{aligned} 2\,T = {} & MR^2\omega'^2 + A\vartheta'^2 + (A\,\mathrm{sen}^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 + C(\varphi'^2 + 2\,\psi'\varphi'\cos\vartheta) \\ & + 2\,MER\,\omega'(-\vartheta'\cos\vartheta\cos\chi + \psi'\,\mathrm{sen}\vartheta\,\mathrm{sen}\chi)\,, \end{aligned}$$

dove $\chi = \psi - \omega$ rappresenta l' angolo che la linea dei nodi forma col raggio O P. Come coordinate indipendenti del sistema potremo quindi assumere $\chi\,\psi\,\varphi\,\vartheta$, e come caratteristiche della velocità $\omega'\,\psi'\,\varphi'\,\vartheta'$, di cui le tre ultime sono le derivate di tre coordinate.

Le equazioni del movimento prendono la seguente forma:

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt}\Big\{ MR^2\omega' + MER\,(\psi'\,\mathrm{sen}\vartheta\,\mathrm{sen}\chi - \vartheta'\cos\vartheta\cos\chi)\Big\} \\ & \qquad\qquad = -MER\omega'(\psi'\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\chi + \vartheta'\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\chi) \\ & \frac{d}{dt}\Big\{(A\,\mathrm{sen}^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi' + C\varphi'\cos\vartheta + MER\omega'\,\mathrm{sen}\vartheta\,\mathrm{sen}\chi\Big\} = MER\omega'\ (\text{id.}) \\ & \frac{d}{dt}\, C(\varphi' + \psi'\cos\vartheta) = 0 \\ & \frac{d}{dt}\,(A\vartheta' - MER\omega'\cos\vartheta\cos\chi) = (A - C)\psi'^2\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta - C\psi'\varphi'\,\mathrm{sen}\vartheta + \\ & \qquad\qquad + MER\omega'(\psi'\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\chi + \vartheta'\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\chi). \end{aligned} \right.$$

e si ottengono sia scrivendo le equazioni di Lagrange della seconda forma avendo cura di leggere, nella (5), $\psi - \omega$ in luogo di χ; sia specializzando le equazioni che il prof. Volterra dedusse per quei sistemi in cui le velocità sono definite mediante caratteristiche di specie qualunque [1]).

Dalle (A) si ricavano subito due integrali primi lineari. L'uno, che si ottiene dalla terza, è

$$\varphi' + \psi' \cos\vartheta = r,$$

dove r indica una costante arbitraria; l'altro segue dalle due prime osservando che i secondi membri sono eguali e di segno opposto, ed è

$$(7)\quad \begin{aligned} &\mathrm{M\,R}\,\omega' (\mathrm{R} + \mathrm{E} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\chi) + (\mathrm{A} \operatorname{sen}^2\vartheta + \mathrm{C}\cos^2\vartheta + \\ &+ \mathrm{M\,E\,R} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\chi)\,\psi' + \mathrm{C}\,\varphi' \cos\vartheta - \mathrm{M\,E\,R}\,\vartheta' \cos\vartheta \cos\chi = \mathrm{K}, \end{aligned}$$

ove K rappresenta una nuova costante arbitraria. Se a queste due equazioni uniamo quella che esprime il principio della forza viva (e che non è altro se non la (5) nella quale in luogo di T si legga una costante arbitraria h), lo studio del movimento del solido resta ridotto a quello di un sistema di tre equazioni differenziali del 1° ordine e di una del 2°, che potrà essere, ad es., l'ultima delle (A).

7. È facile riconoscere il significato dei due integrali (6) e (7). Il primo è quello stesso che s'è incontrato al n. 3: all'interpretazione cinematica ivi data se ne può aggiungere una meccanica, osservando che la quantità di moto di tutto il solido nella sua rotazione intorno al punto P ha per momento, rispetto all'asse ζ, il prodotto C r. Allora possiamo dire che *il momento, rispetto all'asse del solido, della quantità di moto di questo nella sua rotazione intorno al punto* P *è costante.*

1) Volterra, Sopra una classe di equazioni dinamiche; R. Acc. d. Sc. di Torino, v. 33 (1898). Le equazioni in questione sono le (C) del § 3, nelle quali sono nulli tutti i coefficienti $a_{sk}^{(r)}$, come pure i termini P_s.

8. Per avere il significato della (7) dobbiamo prendere in considerazione il moto del solido non più rispetto al punto P, ma rispetto al sistema $x\,y\,z$ o, come diremo, il *moto assoluto* del solido, intendendo che gli assi $x\,y\,z$ siano assolutamente fissi. Perciò chiameremo $\pi_1\,\pi_2\,\pi_3$ le componenti, rispetto agli assi $x\,y\,z$, della rotazione istantanea del solido intorno a P, ed allora la velocità dell'elemento generico dm del solido avrà per proiezioni sugli assi medesimi:

$$v_x = a' + \pi_2 z - \pi_3 (y - b)$$
$$v_y = b' + \pi_3 (x - a) - \pi_1 z$$
$$v_z = \pi_1 (y - b) - \pi_2 (x - a) .$$

Di qui si ha:

$$v_y x - v_x y = b'x - a'y + \{\pi_3(x-a) - \pi_1 z\} x - \{\pi_2 z - \pi_3 (y-b)\} y ;$$

sostituendo ad a e b le coordinate polari R e ω di P, e osservando che è

$$x = x_1 + a , \quad y = y_1 + b , \quad z = z_1 ,$$

abbiamo:

$$v_y x - v_x y = \mathrm{R}\omega' (\mathrm{R} + x_1 \cos\omega + y_1 \operatorname{sen}\omega) +$$
$$+ (\pi_3 x_1 - \pi_1 z_1)(x_1 + \mathrm{R}\cos\omega) - (\pi_2 z_1 - \pi_3 y_1)(y_1 + \mathrm{R}\operatorname{sen}\omega) .$$

Questa espressione, moltiplicata per dm, dà il momento, rispetto all'asse z, della quantità di moto dell'elemento dm nel moto assoluto del solido. Il momento stesso relativo a tutto il solido sarà dunque dato, se diciamo $x_1^0\,y_1^0\,z_1^0$ le coordinate di G rispetto agli assi $x_1\,y_1\,z_1$, da

$$\int (v_y x - v_x y)\,dm = \mathrm{MR}\omega' (\mathrm{R} + x_1^0 \cos\omega + y_1^0 \operatorname{sen}\omega) -$$
$$- \mathrm{MR} z_1^0 (\pi_1 \cos\omega + \pi_2 \operatorname{sen}\omega) + \mathrm{MR}\pi_3 (x_1^0 \cos\omega + y_1^0 \operatorname{sen}\omega) +$$
$$+ \pi_3 \int (x_1^2 + y_1^2)\,dm - \pi_1 \int z_1 x_1\,dm - \pi_2 \int z_1 y_1\,dm .$$

Ma si ha geometricamente:

$$x_1^0 = \mathrm{E}\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\vartheta , \quad y_1^0 = - \mathrm{E}\cos\psi \operatorname{sen}\vartheta , \quad z_1^0 = \mathrm{E}\cos\vartheta ,$$

onde

$$x_1^0 \cos\omega + y_1^0 \operatorname{sen}\omega = \mathrm{E} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\chi\,;$$

inoltre dalle formole [1])

$$\pi_1 = \vartheta' \cos\psi + \varphi' \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi$$
$$\pi_2 = \vartheta' \operatorname{sen}\psi - \varphi' \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi$$
$$\pi_3 = \psi' + \varphi' \cos\vartheta\,,$$

analoghe alle (1) si ottiene:

$$\pi_3 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\chi - (\pi_1 \cos\omega + \pi_2 \operatorname{sen}\omega)\cos\vartheta =$$
$$= \psi' \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\chi - \vartheta' \cos\vartheta \cos\chi\,;$$

infine si ha:

$\int(x_1^2+y_1^2)\,dm =$ mom. d'in.ª risp. all'asse $z_1 = \mathrm{A}\operatorname{sen}^2\vartheta + \mathrm{C}\cos^2\vartheta$

$\int z_1 x_1\,dm =$ mom. misto risp. agli assi x_1 e $z_1 =$

$$= (\mathrm{A}-\mathrm{C}) \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \operatorname{sen}\psi$$

$\int z_1 y_1\,dm =$ mom. misto risp. agli assi y_1 e $z_1 =$

$$= (\mathrm{C}-\mathrm{A}) \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \cos\psi\,.$$

Sostituendo nella formola che dà l' $\int(v_y x - v_x y)\,dm$, si trova che questo s'identifica col primo membro della (7).

Ecco dunque cosa significa questo integrale: *il momento, rispetto all'asse del cerchio percorso dal punto* P, *della quantità di moto del solido nel suo movimento assoluto è costante.*

È da notarsi che, a differenza dell'integrale (6), non si può interpretare il (7) in modo cinematico.

9. Nell'ipotesi che il punto P sia fisso il moto si riduce, come si è già detto, ad una rotazione uniforme intorno ad un asse passante per P; ciò equivale a dire che sono costanti le componenti della rotazione (ovvero dell'asse momento della coppia di quantità di moto) rispetto sia ad un asse qualunque

1) Cfr. Klein Sommerfeld, Th. d. Kr., p. 45.

fisso nel solido, sia ad un asse qualunque fisso nello spazio. Il confronto di tale proprietà con quelle espresse dagli integrali (6) e (7) nel caso in cui P descriva un cerchio, mostra quanto sia venuto complicandosi il movimento colla maggiore libertà concessa al solido.

§ 3°: *Moti precessionali: loro ricerca e discussione.*

10. Diremo *moti precessionali* del solido quei movimenti nei quali la rotazione che il solido compie intorno al punto P consiste in una precessione regolare, risultante di una rotazione uniforme del solido intorno all'asse ζ e di una rotazione uniforme di ζ intorno a z_1; quei movimenti, cioè, nei quali si mantengono costanti le due velocità ψ' e φ' e l'angolo ϑ. Ci proponiamo di riconoscere se ed a quali condizioni il solido possa essere animato da un moto precessionale.

Consideriamo perciò l'integrale della forza viva

$$(5)' \qquad T = h$$

e l'integrale (7), i quali, nell'ipotesi che ϑ sia costante, si scrivono:

$$(B) \begin{cases} MR^2\omega'^2 + (A \operatorname{sen}^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 + C(\varphi'^2 + 2\psi'\varphi'\cos\vartheta) + \\ \qquad + 2MER\omega'\psi' \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\chi = 2h \\ MR^2\omega' + (A \operatorname{sen}^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi' + C\varphi'\cos\vartheta + \\ \qquad + MER(\omega' + \psi')\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\chi = K\,. \end{cases}$$

Queste due equazioni, moltiplicate rispettivamente per $\omega' + \psi'$ e $-2\omega'\psi'$, indi sommate, danno luogo ad un'equazione di 3° grado in ω' la quale, supposti pure costanti ψ' e φ', è a coefficienti tutti costanti: il valore od i valori reali ch'essa fornisce per ω' sono quindi costanti.

Dopo ciò, introduciamo nelle equazioni non integrate (A) l'ipotesi della costanza di ϑ, ψ', φ', ω'; la terza vien soddisfatta senz'altro, e le altre tre prendono la forma seguente:

$$(A') \quad \begin{cases} \mathrm{MER}\psi'^2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \chi = 0 \\ \mathrm{MER}\omega'^2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \chi = 0 \\ \mathrm{MER}\omega'^2 \cos \vartheta \operatorname{sen} \chi = \{(C - A)\,\psi' \cos \vartheta + C\varphi'\}\psi' \operatorname{sen} \vartheta \,. \end{cases}$$

Si otterranno tutti i moti precessionali possibili eguagliando a zero separatamente i singoli fattori della prima e della seconda equazione, e introducendo ogni volta la condizione che ne risulta nelle rimanenti due equazioni (A').

11. Vediamo quali sono i movimenti che si vengono così a definire.

1) Si soddisfa alle (A') facendo ad un tempo:

$$(8) \qquad E = 0\,, \{(C - A)\,\psi' \cos \vartheta + C\varphi'\}\,\psi' \operatorname{sen} \vartheta = 0\,.$$

Il supporre $E = 0$ equivale ad ammettere che il punto vincolato sia lo stesso baricentro G; è un caso che dovevamo attenderci, poichè s'è visto nel § 1° che allora il movimento del solido intorno a G avviene come se questo fosse fisso; è dunque una precessione regolare intorno a G, di cui uno degli assi è ζ. L'altro asse poi è z_1, poichè la condizione complementare

$$(8') \qquad (C - A)\,\psi' \cos \vartheta + C\varphi' = 0$$

non è altro che l'equazione alla quale debbono soddisfare le due velocità precessionali ψ' e φ' nel moto spontaneo di un solido di rivoluzione fissato per un punto dell'asse, quando gli assi della precessione a cui si riduce il movimento siano z_1 e ζ (Cfr. Klein-Sommerfeld, Th. d. Kreisels, p. 153). L'eguagliare a zero i due rimanenti fattori nella seconda (8) darebbe luogo a due casi limiti della precessione ora detta.

2*a*) Un secondo moto precessionale si ha supponendo $R = 0$ insieme alla seconda (8). Il punto P questa volta è fisso (cioè descrive un cerchio di raggio nullo); come il precedente, anche questo caso era da prevedersi, perchè il movimento consiste in una precessione regolare intorno al punto P.

Sostanzialmente identico a quello ora trovato è il moto

2*b*) che si ottiene facendo $\omega' = 0$. Tutt'al più le due ipotesi $R = 0$ e $\omega' = 0$ corrispondono a due modi diversi di con-

cepire il caso del punto P fisso come limite del caso generale: (cioè la prima equivale a pensare il punto P mobile sopra un cerchio il cui raggio si faccia tendere a zero, mentre la seconda equivale a supporre che tenda a zero la velocità di P mobile sopra un cerchio di raggio finito. Affinchè le (A') siano soddisfatte per $\omega' = 0$ bisognerà ancora che sian verificate la seconda (8) e la

$$\text{(9)} \qquad ER\,\psi' \operatorname{sen} \vartheta \cos \chi = 0 \,.$$

Ma è facile vedere che di quest' ultima condizione è inutile tener conto. Difatti siccome il cerchio (γ) è un elemento completamente estraneo al moto del solido, nulla impedisce di attribuirgli le dimensioni che si vogliono: in particolare si può sempre pensare che abbia raggio nullo ($R = 0$). La (9) non potrà essere trascurata nel solo caso che il moto in questione debba venire paragonato con altri movimenti nei quali ω' non sia più nullo e dei quali il moto stesso si consideri come limite: è appunto quello che accadrà nello studio della stabilità che verrà fatto nel § 5°. Per ora noi comprenderemo in un caso unico i due movimenti *2a*) e *2b*), ritenendoli caratterizzati dalla condizione $R\,\omega' = 0$ unitamente alla seconda (8).

3) Le due equazioni

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{sen} \vartheta = 0 \,,$$

$$\text{(10')} \qquad ER\,\omega' \operatorname{sen} \chi = 0$$

ci danno un nuovo moto precessionale; la (10) esprime che l'asse ζ è parallelo a z, ossia che coincidono i piani $\xi\eta$ e xy, onde riesce indeterminata la linea dei nodi N e la sua inclinazione χ sulla retta OP. Allora, potendosi attribuire a sen χ il valore che si vuole fra -1 e $+1$, la (10') si riduce semplicemente a $ER\,\omega' = 0$, e dice, che per $\operatorname{sen} \vartheta = 0$ si ha un moto precessionale solo in uno di questi due casi: quando il punto P è fisso, oppure quando il punto vincolato è il baricentro. Questo movimento si dovrebbe, a rigore, comprendere come caso limite in ciascuno dei precedenti; è bene però tenernelo distinto per la singolarità che presenta dell' inde-

terminazione di tre coordinate: una, χ, riesce indeterminata completamente, — delle altre due, ψ e φ, è determinata soltanto la somma [1]).

4) Una quarta soluzione delle (A') si trova facendo

$$(11) \qquad \cos\chi = 0\,,$$

$$(11') \qquad \pm \mathrm{MER}\omega'^2 \cos\vartheta = \{(C-A)\,\psi'\cos\vartheta + C\varphi'\}\,\psi'\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,.$$

La (11) significa che l'asse del solido incontra l'asse z. Difatti se noi imaginiamo proiettato il baricentro G sul piano xy in G', la retta PG' riesce evidentemente perpendicolare alla linea dei nodi N; ora se questa è a sua volta perpendicolare alla

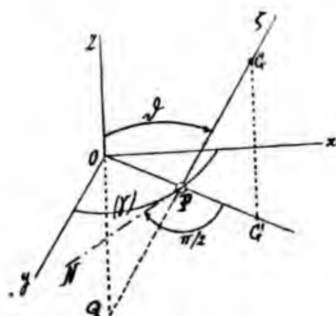


Fig. 2.

retta OP ($\cos\chi = 0$), vuol dire che G' cade sul raggio OP, dal che segue senz'altro che gli assi ζ e z stanno in un mede-

1) In questo movimento il sistema dipende solo più da due coordinate, cioè da ω e dall'angolo λ degli assi ξ e x; per la forza viva si ha allora:

$$2\,T = M\,R^2\omega'^2 + A\,\lambda'^2\,,$$

e le due equazioni del movimento danno senz'altro

$$\omega' = \text{cost.}\,, \qquad \lambda' = \text{cost.}$$

Siccome poi λ non è altro che la somma dei due angoli ψ e φ (ciascuno dei quali, preso separatamente, è indeterminato), scrivendo, in luogo dei due integrali precedenti, il sistema equivalente

$$\lambda' = r\,, \qquad M\,R^2\,\omega' + A\,\lambda' = K\,,$$

si ritrovano i due integrali (6) e (7) specializzati per $\mathrm{sen}\,\vartheta = 0$.

simo piano. Chiamando Q il punto comune a questi due assi (punto che rimarrà fisso tanto sull'uno quanto sull'altro in tutto il movimento), si potrà concepire il moto complessivo del solido come una precessione regolare intorno a Q, e precisamente come risultante di una rotazione del solido intorno a ζ con velocità costante φ' e di una rotazione uniforme di ζ intorno a z con velocità $\omega' = \psi'$, l'eguaglianza di queste due velocità essendo una conseguenza di $\cos\chi = 0$. Per questa eguaglianza poi la (11') si semplifica in

$$(11'')\qquad \{(A - C)\psi' \cos\vartheta - C\varphi'\} \operatorname{sen}\vartheta \pm MER\psi' \cos\vartheta = 0 .$$

5) Vi è ancora un modo di soddisfare alle (A'), e consiste nel fare $\psi' = 0$ insieme a

$$E\,R\,\omega' \cos\vartheta \operatorname{sen}\chi = 0 , \quad E\,R\,\omega' \operatorname{sen}\vartheta \cos\chi = 0 .$$

I movimenti

$$\psi' = 0 , \quad E\,R\,\omega' = 0$$

non sono nuovi, perchè già compresi in 1), 2*a*), 2*b*). Restano da considerare le due combinazioni

$$\psi' = 0 , \quad \cos\vartheta = 0 , \quad \cos\chi = 0$$

e

$$\psi' = 0 , \quad \operatorname{sen}\vartheta = 0 , \quad \operatorname{sen}\chi = 0 .$$

Quanto alla prima, rientra sia in 4) sia in 2*b*), perchè da $\cos\chi = 0$ segue $\chi' = 0$ e quindi $\psi' = \omega' = 0$; quanto alla seconda, non c'è neppure da prenderla in considerazione, poichè per $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ gli angoli ψ e χ perdono ogni significato.

12. Riassumendo, i moti precessionali del sistema si riducono a quattro tipi, i cui caratteri distintivi possiamo compendiare nella tabella seguente:

$$(C)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 1) & E = 0 , \\ 2) & R\omega' = 0 , \end{array}\right\} (C - A)\psi' \cos\vartheta + C\varphi' = 0 \\ 3) \quad \operatorname{sen}\vartheta = 0 , \quad ER\omega' = 0 \\ 4) \quad \cos\chi = 0 , \quad \pm MER\psi' = \{(C - A)\psi' \cos\vartheta + C\varphi'\} \operatorname{tg}\vartheta . \end{cases}$$

Otteniamo dunque come possibile un moto precessionale nei casi seguenti: 1° quando il punto vincolato è il baricentro; — 2° quando un punto dell'asse del solido rimane fisso, e quindi il movimento complessivo del solido si riduce ad una precessione regolare intorno a questo punto. Nel secondo caso il punto fisso non può essere, evidentemente, che lo stesso punto vincolato, a meno che l'asse del solido stia in un piano coll'asse del cerchio (γ), ed allora il punto fisso è il punto (situato a distanza finita od infinita) comune ai due assi; così il secondo caso si suddivide a sua volta in tre altri, che sono quelli da noi denotati con 2), 3), 4).

Tutti e quattro i movimenti hanno in comune una proprietà (s'intende, oltre a quelle che han servito a definirli), e di cui già abbiamo fatto uso, cioè: $\omega' = \text{cost.}$ *In tutti i moti precessionali adunque il punto* P *percorre con velocità costante il cerchio* (γ).

13. Riguardo alla precessione regolare a cui si riduce il moto 4) osserveremo che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto Q è di rotazione intorno all'asse ζ; perciò il solido compirebbe ancora una precessione regolare intorno a Q quando si tenesse fisso questo punto, sopprimendo il vincolo costituito dal cerchio (γ). Le due precessioni non sono però da confondersi. Difatti, se A' è il momento d'inerzia del solido rispetto ad un asse perpendicolare nel punto Q all'asse ζ, sappiamo che, nell'ipotesi del punto Q fisso, le costanti del sistema e le velocità precessionali sono legate dalla (8'), come s'è ricordato al n. 11. Ora si ha:

$$A' = A + \frac{MR}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}(R \pm 2E \operatorname{sen} \vartheta) \; ,$$

onde la (8') non coincide colla (11") se non nel caso eccezionale che si abbia

$$R - E \operatorname{sen} \vartheta = 0 \; ,$$

cioè il punto Q sia il baricentro G. Esclusa questa ipotesi, vediamo in che cosa la nostra precessione (11") si differenzi da

quella del solido di rivoluzione fisso per un punto Q del suo asse.

Dobbiamo perciò riferirci alla classificazione che i signori Klein e Sommerfeld fanno delle precessioni regolari in quattro tipi, secondo il valore del rapporto delle velocità ψ' e φ', cioè secondo la posizione relativa dei coni poloide ed erpoloide (Cfr. Th. d. Kr., p. 51 e segg.); nonchè la discussione della precessione regolare spontanea del solido di rivoluzione fisso per un punto del suo asse (ibid., p. 161 e segg.). In base a questa discussione la (8') permette due soli tipi di precessione, cioè la cosidetta *epicicloidica* se l'ellissoide d'inerzia relativo al punto Q è allungato ($A' > C$), e la *pericicloidica* se quell'ellissoide è schiacciato ($A' < C$): nella prima i due coni, poloide ed erpoloide, sono esterni l'uno all'altro, nella seconda l'erpoloide è interno al poloide e le semiaperture di entrambi sono angoli acuti.

Ora, posto

$$r = \frac{\psi'}{\varphi'},$$

dalla (11") si ha:

$$r = \frac{C \operatorname{tg} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta \pm MER};$$

noi possiamo sempre supporre, in questo movimento, ϑ acuto, poichè un'eventuale inversione del senso positivo sull'asse z non porta nessun cambiamento essenziale nel sistema; perciò non vi saranno da distinguere, circa la formola precedente, che questi quattro casi:

(*a*) $\operatorname{sen} \chi = +1, \quad A - C > 0$

(*b*) $\operatorname{sen} \chi = +1, \quad A - C < 0$

(*c*) $\operatorname{sen} \chi = -1, \quad A - C > 0$

(*d*) $\operatorname{sen} \chi = -1, \quad A - C < 0.$

D'altra parte i quattro tipi di precessioni classificati da Klein e Sommerfeld corrispondono a far variare r entro i seguenti quattro intervalli nei quali si può dividere tutto il campo da $+\infty$ a $-\infty$:

$$+\infty, \quad 0, \quad -\cos\vartheta, \quad -\frac{1}{\cos\vartheta}, \quad -\infty.$$

Nell'ipotesi (*a*) si ha sempre $\tau > 0$ [1]), e la precessione non può essere che del 1° tipo *(epicicloidica).*

Nell'ipotesi (*b*) è possibile una precessione del 1° tipo ($\tau > 0$), perchè si può sempre scegliere l'angolo ϑ in modo da avere

$$(A - C) \operatorname{sen} \vartheta + M E R > 0 .$$

Per rendere $\tau < 0$ occorre invece che si abbia

$$M E R < C - A ;$$

ammessa questa disuguaglianza, si vede facilmente che si cade di necessità in una precessione del 4° tipo *(pericicloidica:* il cono erpoloide è interno al poloide, e le semiaperture di entrambi sono angoli acuti), perchè si ha sempre $\tau < \frac{1}{\cos\vartheta}$. Difatti dalla disuguaglianza evidente

$$A \operatorname{sen} \vartheta + M E R > 0$$

si deduce:

$$(A - C) \operatorname{sen} \vartheta + M E R > - C \operatorname{sen} \vartheta ,$$

da cui, ricordando che il primo membro è negativo,

$$\frac{C \operatorname{sen} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta + MER} < -1 ,$$

e quindi, dividendo per $\cos\vartheta$:

$$\tau < -\frac{1}{\cos\vartheta} .$$

Passiamo al caso (*c*). Si ha τ compreso nel 1° intervallo quando sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - M E R > 0 ,$$

il che, per essere $\operatorname{sen} \vartheta$ compreso fra 0 e 1, esige che si abbia

$$M E R < A - C .$$

1) Non stiamo neppure a considerare i casi limiti che corrisponderebbero ad eguagliare τ ai valori che separano due intervalli consecutivi.

Non si richiede invece alcuna condizione per le costanti del sistema affinchè r sia negativo, potendosi sempre determinare un angolo ϑ per modo che sia

$$(12) \qquad (A - C) \operatorname{sen} \vartheta - M E R < 0 .$$

Vediamo di più in quali, fra il 2°, 3°, 4° intervallo, può cadere r. Affinchè stia nel secondo $(0 > r > -\cos \vartheta)$ si deve avere, insieme alla (12):

$$(13) \qquad \frac{C \operatorname{sen} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - MER} > -\cos^2 \vartheta ,$$

ossia

$$C \operatorname{sen} \vartheta < -\cos^2 \vartheta \{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - MER\}$$ [1],

od anche

$$(C \operatorname{sen}^2 \vartheta + A \cos^2 \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta < MER \cos^2 \vartheta ,$$

ed a questa è sempre possibile soddisfare scegliendo ϑ sufficientemente piccolo, poichè basta osservare che per ϑ prossimo allo 0 il primo membro diventa piccolissimo, mentre il secondo si approssima alla quantità finita M E R. È dunque possibile senz' altro una precessione del 2° tipo (*ipocicloidica:* il cono poloide è interno all' erpoloide).

Volendo che r appartenga al 3° intervallo

$$\left(-\cos \vartheta > r > -\frac{1}{\cos \vartheta}\right),$$

bisognerà vedere se si può trovare un angolo ϑ per cui si abbia

$$-1 < \frac{C \operatorname{sen} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - MER} < -\cos^2 \vartheta ,$$

ossia

$$(14) \qquad \begin{cases} (C \operatorname{sen}^2 \vartheta + A \cos^2 \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta > MER \cos^2 \vartheta \\ A \operatorname{sen} \vartheta < MER , \end{cases}$$

delle quali la prima richiede che ϑ sia sufficientemente grande, e la seconda che sia sufficientemente piccolo. Chiamando ϑ_0 il

1) L'inversione del segno > in < s'è fatta perchè si è moltiplicato per una quantità negativa.

massimo valore di ϑ che soddisfa alla $A \operatorname{sen} \vartheta \leq MER$, e cioè prendendo $\operatorname{sen} \vartheta_0 = 1$ se $MER \geq A$, e $\operatorname{sen} \vartheta_0 = \frac{MER}{A}$ se $MER < A$, si verifica immediatamente che per $\vartheta = \vartheta_0$ è soddisfatta la prima (14): esistono perciò due angoli ϑ_1 e ϑ_2 ($\vartheta_1 < \vartheta_0 < \vartheta_2$) tali che in tutto l' intervallo ($\vartheta_1 \vartheta_2$) quella disuguaglianza è soddisfatta, ed allora basta prendere ϑ fra ϑ_1 e ϑ_0 affinchè sian verificate entrambe le (14). Si può dunque avere nel caso (*c*) anche una precessione del 3° tipo *(anticicloidica :* il cono poloide contiene nel suo interno l' erpoloide, essendo le semiaperture dei due coni rispettivamente un angolo ottuso ed un angolo acuto).

Infine per ottenere una precessione del 4° tipo *(pericicloidica)* bisogna fare

$$r < -\frac{1}{\cos \vartheta},$$

cioè

$$A \operatorname{sen} \vartheta > M E R,$$

il che può avvenire solo per $M E R < A$.

In sostanza, nell' ipotesi (*c*) sono possibili senza alcuna restrizione le precessioni del 2° e del 3° tipo; possono inoltre presentarsi quelle del 1° e del 4° quando è $M E R < A - C$, oppure soltanto quelle del 4° se, essendo $M E R > A - C$, si ha però $M E R < A$.

Venendo finalmente al caso (*d*), si vede subito che si ha sempre $r < 0$, onde restano escluse le precessioni del 1° tipo. Quanto alle altre, si arriva alle identiche conclusioni che pel caso (*c*).

Tutta questa discussione si può riassumere nella seguente tabella:

	tipo 1°	2°	3°	4°
caso (*a*)		0	0	0
(*b*)		0	0	$MER < C - A$
(*c*)	$MER < A - C$			$MER < A$
(*d*)	0			$MER < A$

In ogni quadretto s'è scritta la condizione a cui devono soddisfare le costanti A, C, M E R affinchè sia possibile la corrispondente precessione, lasciandolo vuoto quando nessuna condizione è richiesta, e scrivendovi invece uno zero quando la precessione non esiste affatto.

Si noterà l'analogia che presentano, da un lato, i casi (*a*) e (*b*) e, dall'altro, i casi (*c*) e (*d*); l'analogia fra i casi dell'una coppia o quelli dell'altra si conserva, come vedremo, nel modo di comportarsi di queste precessioni rispetto alla stabilità.

14. Termineremo la discussione del moto 4) facendo notare come la proprietà, di cui esso gode, che si mantengono costanti ω' e χ, è caratteristica per questo movimento; di modo che lo si può caratterizzare sia colla costanza di elementi relativi esclusivamente alla rotazione del solido intorno al punto P, sia colla costanza di elementi che riguardano in parte il moto del punto P ed in parte il moto del solido intorno a P.

Tralasceremo la dimostrazione che non presenta difficoltà, come pure ci limiteremo ad un cenno di un altro aspetto sotto il quale si può mettere il moto 4). In virtù della (6) la costanza di ϑ segue dall'ipotesi sulla costanza di ψ' e φ'; per il moto 4) possiamo dunque dire che dall'essere costanti le velocità ψ' e φ' si deduce che devono pure essere costanti le coordinate ϑ e χ (nonchè la velocità ω'). Ora questa proposizione è invertibile, in quanto dalla costanza di ϑ e χ segue la costanza delle velocità ψ' e φ' (e quindi quella di ω').

LETTERATURA FISICA

A. Fisica generale.

1. Generalità.

Malý F. Beitrag zur Theorie der Schnellwage. *Deut. Mech. Zeit.* 1907, pag. 53.

Wilson E. B. On Divergence and Curl. *Sill. Journ.* (4), **23**, pag. 214, 1907.

Behn U. Some new Experiments with the Flame Tube. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 627, 1907.

Lane A. C. Definition of Solid and Fluid. *Science.* **25**, pag. 190, 1907.

Hahn H. Physikalische Freihandversuche. Berlin, O. Salle, 1907.

Pellat H. Des atomes plurivalents. *Compt. Rend.* **144**, pag. 969, 1907.

Weinberg B. Erinnerung an T. Schwedow. *Journ. de la Soc. phys.-chim. Russe.* 39, pag. 11, 1907.

Handke F. Das Physikalische Institut des Handelshochschule Berlin. *D. Mech. Zeit.* 1907, pag. 57.

Marcolongo R. La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica. *Rend. Acc. Lincei.* (5), **16**, pag. 742, 1907.

— Die Tätigkeit der Physikalisch - Technischen Reichsanstalt im Jahre. 1906. *Zeit. für Instrkunde.* **27**, pag. 109, 1907.

Benoît R., Fabry Ch. et **Perot A.** Nouvelle détermination du Mètre en longueurs d'ondes lumineuses. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1082, 1907.

2. Densità.

Gray R. W. The density of Hydrogen chloride. *Chem. Soc. London.* 18 Aprile 1907.

Richards T. W. und **Brink F. N.** Die Dichten von Li. Na. K. Rb. und Ce. *Journ. Am. Chem. Soc.* **29**, pag. 117, 1907.

3. Meccanica dei solidi. Elasticità. Potenziale.

Grüneisen E. Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. I Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul. *Ann. der Phys.* (4). **22**, pag. 801, 1907.

Von **Mises R.** Ueber die H. Lorenzsche Theorie der Kreiselräder. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 314, 1907.

Zimmermann. Untersuchungen über Stäbe die durch längs gerichtete Kräfte belastet und in der Querrichtung in einzelnen Punkten elastisch gestützt sind. *Ak. der Wiss.* Berlin, 11 Aprile 1907.

Korn A. Sur les équations de l'élasticité. *Ann. scient. de l'Ecole Norm. Supér.* (3), **24**, N. 2, 1907.

Terrados E. Figure d'equilibrio d'un filo elastico. *An. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 39. Gennaio 1907.

Nicolai G. Fr. Die Gestalt einer deformierten Manometermembran experimentell bestimmt. *Archiv. f. Phys.* 1907, pag. 129.

4. Meccanica dei Liquidi. Capillarità.

Smoluchowski M. Contribution à la théorie du mouvement des liquides visqueux; en particulier des problèmes en deux dimensions. *Krak. Anz.* 1907, pag. 1.

Renard T. et **Guye A. P.** Mesures de tensions superficielles à l'air libre. *Journ. chim. phys.* **5**, pag. 81, 1907.

Hoskins L. M. Textbook on Hydraulics. London 1907.

5. Meccanica degli aeriformi.

Brunhes B. Action d'un courant aérien horizontal sur un tourbillon vertical. *Compt. Rend.* **144**, pag. 900, 1907.

Canovetti. Sur la résistance de l'air au mouvement des corps. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1030, 1907.

6. Apparecchi.

Stevenson R. Manostats. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 107, 1907.

Wolters H. Eine neue Sekunden. Registrieruhr. *Mechan.* **15**, pag. 17, 1907.

Giran H. Sur un cryoscope de précision. *Bull. soc. chim.* (4). **1**, pag. 290, 1907.

B. Fisica-chimica.

1. Generalità. Teoria. Pressione osmotica. Attrito interno.

André P. Ueber das Meldesche Phänomen. 32 pag. Diss. Bonn. 1907.

Magri G. Ricerche sopra il solvente H_2S liquefatto. *Rend. Acc. Lincei.* (5). **16**, pag. 518, 1907.

Battelli A. et **Stefanini A.** Sur la nature de la pression osmotique. *Journ. de phys.* (4). **5**, pag. 402, 1907.

Guye P. A. Application de la méthode des densités limites aux gaz permanents à 0°; constante des gaz parfaits. *Compt. Rend.* **144**, pag. 976, 1907.

Bose E. Ueber die physikalischen Eigenschaften von Emulsionen, insbesondere über deren Beziehung zu den kristallinischen Flüssigkeiten. *Phys. Zeit.* 8, pag. 347, 1907.

Bose E. Ueber die Ermittelung der Partialtensionen binärer Gemische aus Messungen der Totaltensionen und der einen Partialtension aus Messungen der anderen. *Phys. Zeit.* 8, pag. 352, 1907.

Dutoit P. Revue annuelle de Chimie physique. *Rev. génér. des Sciences.* 18, pag. 365, 1907.

Oliveira Pinto S. J. Cristalli liquidi. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 40, Febbraio 1907.

Mourelo R. J. Le soluzioni solide. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* N. 40, Febbraio 1907.

Roth W. A. Physikalisch-chemische Uebungen. Hamburg, L. Voss, 1907.

Puccianti L. Misure di viscosità sopra i cristalli fluidi del Lehmann. *Rend. Acc. Lincei,* (5), **16**, pag. 754, 1907.

Van der Ven E. La charge de contact entre une paroi poreuse et des solutions salines. *Arch. Musée Teyler.* (2), **10**, pag. 433, 1907.

Pauli W. Physical Chemistry in the Service of Medicine. IX-156 pag. London. Chapman and Hall. Ltd. 1907.

Tsakalotos D. E. Application de la loi de Trouton à la détermination des élévations moléculaires des points d'ébullitions des dissolutions. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1104, 1907.

2. Affinità. Solubilità. Assorbimento. Diffusione.

Konovaloff D. Sur l'action mutuelle des corps en dissolution d'après les données de leurs tensions de vapeur. *Journ. chim. phys.* **5**, pag. 1, 1907.

Duclaux J. Recherches sur les substances collaidales. *Journ. chim. phys.* **5**, pag. 29, 1907.

Vegard L. Contributions to the theory of Solutions. *Phil. Mag.* (6). **13**, pag. 589, 1907.

Thorp T. An apparent case of gaseous absorption caused by the action of a few milligrams of radiumbromide on the sides of a glass tube containing the radium. *Lit. and phil. Soc. Manch.* 26 Marzo 1907.

Travers M. W. Note on the absortion of gases, vapours, and substances from solution by solids and amorphous substances. *Asiatic Soc. of Bengal.* 3 Aprile 1907.

Nozari M. Sul colore delle soluzioni acquose di cloruro di rame in relazione con la dissociazione elettrolitica. *Atti Acc. Scienz. Torino* 27 Gennaio 1907.

Soddy F. Calcium as an Absorbent of Gases for the production of high Vacua. *Roy. Soc. Proc.* **78**, pag. 429, 1907.

Bruni G. e **Vanzetti B. L.** Sulla velocità di diffusione degli elettroliti. *Gazz. chim ital.* **37**, pag. 396, 1907.

Schreinemakers F. A. H. On a tetracomponent system with two liquid phases. *Proc. Amsterdam.* **9**. pag. 607, 1907.

Kohnstamm P. On metastable and unstable equilibria solid-fluid. *Proc. Amsterdam.* **9**, pag. 648, 1907.

Vorländer D. Substanzen mit mehreren festen und mehreren flüssigen Phasen. *Chem Ber.* **40**, pag. 1415, 1907.

3. Elettrochimica. Elettrolisi.

John H. Ueber die Wanderungsgeschwindigkeit der Jonen in verdünnten Lösungen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. **641**, 1907.

Drucker K. Beweglichkeit von Jonen in Wasser. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 81, 1907.

Müller E. Eine praktische Form von Kohletiegeln für pyroelektrische Versuche. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 108, 1907.

Huybrechts M. Sur la vitesse des ions des électrolytes. *Ann. de chim. et phys.* (8). **11**, pag. 68, 1907.

Pellat H. Détermination directe de la valeur absolue de la charge électrique d' un ion électrolytique monovalent. Diamètre d'un atome. *Compt. Rend.* **144**, pag. 902, 1907.

Kirpal A. Leitfähigkeitsmessungen an den isomeren Estersäuren der Chinolin und Cinchomeronsäure. *Ak. der Wiss. Wien.* 14 Marzo 1907.

Guyot J. Sur la théorie de Nernst et les chaînes liquides à extrémités identiques. *Compt. Rend.* **144**, pag. 832, 1907.

Levi M. G. e **Ageno F.** Ossidazioni elettrolitiche in presenza di fluoro-joni. *Gazz. chim. Ital.* **37**, pag. 368, 1907.

Rosset G. La repartition du courant dans les électrodes. *Éclair. électr.* **51**, pag. 228, 1907.

Guyot J. Sur la théorie de Nernst et la mesure des différénces de potentiel au contact de deux solutions d'électrolytes. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1035, 1907.

Danneel H. Electrochemistry. 181 pag. New York. 1907.

Abegg R. The Electrolytic Dissociation Theory. VIII+180 pag. New York. 1907.

Nutton H. and **Law H. D.** The potential of Hydrogen liberated from metallic Surfaces. *Farad. Soc.* 19 Marzo 1907.

Hayden J. L. R. Alternating-current electrolysis. *Electrician.* **58**, pag. 969, 1907.

Schor J. und **Simek L.** Ueber elektrolytische Gleichrichtung von Wechselstrom. *Zeit. f. Elektrochem.* **13**, pag. 113, 1907.

Taylor A. H. A Method for the Determination of electrolytic Resistance and Capacity, using Alternating-Currents. *Phys. Rev.* **24**. pag. 402, 1907.

4. Fotochimica.

Bargellini G. e **Mieli A.** Influenza che esercita un sale in varie concentrazioni sulla velocità di decolorazione di soluzioni acquose di sostanze coloranti organiche sotto l'influenza della luce. *Gazz. chim. ital.* **37**, pag. 417, 1907.

Chapman D. L., Chadwick S. and **Ramsbottom J. E.** The chemical changes induces in gases submitted to the action of ultraviolet light. *Chem. Soc. London.* 2 Maggio 1907.

5. Termochimica.

Richards T. W. und **Forbes G. S.** Energieänderungen, die bei der Verdünnung von Zink-und Kadmiumamalgamen auftreten. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 683, 1907.

Lenoble E. Nouvelle formule pour la détermination de la puissance calorifique des combustibles. *Bull. soc. chim.* (4). **1**, pag. 111, 1907.

Holt A. The decomposition of Water Vapour in contact with Hot Platinum Wire. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 630, 1907.

Boudouard O. et **Le Chatelier H.** Sur la limite d'inflammabilité des mélanges de vapeur d'éther et d'air. *Compt. Rend.* **144**, pag. 910, 1907.

Kalm M. Sur la température de formation des carbures de Sr et de Ba. *Compt. Rend.* **144**, pag. 913, 1907.

Hutton R. S. and **Petavel J. E.** Electric Furnace Reaction under High Gaseous Pressures. *Roy. Soc. London.* 7 Marzo 1907.

Le Bas G. The relation between valency and heats of combustion. *Chem. Soc. London.* 2 Maggio 1907.

Dautriche. Vitesse de détonation des explosifs. *Compt. Rend.* **144** pag. 1030, 1907.

Richards J. W. Thermochemistry. *Science.* (N. S). **25**, pag. 414, 1907.

Clark B. M. On the variation of the Heat of Mixture with Concentration und Temperature. *Science.* (N. S). **25**. pag. 527, 1907.

Meunier J. Sur les mélanges explosifs d'air et d'éther. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1107, 1907.

6. Struttura. Cristallografia.

Trautwine J. C. Summation of Stresses in Certain Structures. *Eng. Club. Phil. Proc.* **24**, pag. 123, 1907.

Lehmann O. Scheinbar lebende flüssige Kristalle. *Natur u. Schule.* **6**, pag. 111, 1907.

Lehmann O. Flüssige Kristalle und ihre Analogien zu den niedrigsten Lebewesen. *Kosmos.* **6**, N. 1-2, 1907.

C. Acustica.

1. Acustica fisica.

Martens F. F. Zur optischen Untersuchung von Stimmgabelschwingungen. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 111, 1907.

Martens F. F. Demonstration der Fortpflanzung der Schalles in einer Röhrenleitung. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 113, 1907.

Martens F. F. Demonstration von Schallschwingungen in Luft. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 116, 1907.

Abraham H. Rendement acoustique du téléphone. *Compt. Rend.* **144**, pag. 906, 1907.

Palla J. Ein neues Verfahren zur Aufnahme und Wiedergabe von Lauten. *Mechan.* **15**, pag. 1, 1907.

Waetzmann E. Objective Kombinationstöne and der singenden Bogenlampe. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 346, 1907.

2. Acustica fisiologica.

Meissner G. Klangaufnahmen an Blasinstrumenten, eine Grundlage für das Verständniss der menschlichen Stimme. *Arch. für d. ges. Physiol.* **116**, pag. 543. 1907.

Stücker N. Ueber die Unterschiedempfindlichkeit für Tonhöhen in verschiedenen Tonregionen. *Wien. Anz.* pag. 99, 1907.

Waetzmann E. Zur Helmholtzschen Resonanztheorie. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 307, 1907.

Abraham H. Sensibilité absolue de l'oreille. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1099, 1907.

3. Acustica musicale.

Terada T. Acoustical Investigation of the Japanese Bamboo Pipe, Syakuhati. *Journ. of the Coll. of Scienc. Imp. Univers. Tokyo.* XXI. N. 10, 1907.

4. Apparecchi.

Handke F. und **Martens F. F.** Demonstration der stehenden. Wellen in einer Pfeife durch Mombranen mit seitlichem Spiegel. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 120, 1907.

Handke F. und **Martens F. F.** Ueber das Quinckesche Interferenzrohr mit zweien Schallwegen. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, 121, 1907.

D. Calore.

1. Teoria meccanica del calore.

Von **Mosengeil K.** Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum. *Ann. der Phys.* (4). **22**, pag. 867, 1907.

Van der Waals J. D. Contribution à la théorie des mélanges binaires. *Acad. des Scienc. Amsterdam.* 30 Marzo 1907.

Kamerlingh Onnes H. et **Keesom W. H.** Contribution à la connaissance de la surface ψ de van der Waals. XV. *Acad. des Scienc. Amsterdam.* 30 Marzo 1907.

V. Wesendonck K. Ueber den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie und die sogenannten Molekularbewegungen. *Naturw. Rund.* **22**, pag. 262, 1907.

2. Teoria cinetica della materia.

Mills J. E. Molecular Attraction. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 132, 1907.

Ehrenfest P. und **T.** Ueber zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 311, 1907.

D'Auria L. A preliminary Communication concerning a new fundamental Principle of the kinetic Theory of Gaser. *Science,* (N. S). **25**, pag. 526, 1907.

Fisher W. J. The temperature coefficients of Gas Viscosity. *Phys. Rev.* **24,** pag. 385, 1907.

3. Dilatazione e termometria.

Kamerlingh Omnes H. und **Heuse W.** Ueber Messungen sehr tiefer Temperaturen. Ausdehnungskoeffizient des Jenaenser und Thüringer Glases. *Zeit. f. Kompr. u. flüss. Gase.* **10,** pag. 71, 1906.

Take E. Magnetische und dilatometrische Untersuchung der Umwandlungen Heuslerscher ferromagnetisierbarer Manganlegierungen. *Naturw. Rund* **22**, pag. 221, 1907.

Joly J. Absolute Dilatation of Mercury. *Roy. Dublin Soc. Proc.* **11, 14**, pag. 179, 1907.

Smith A. W. Expansibility and Compressibility of Ether und Alcohols near their Boiling-points. *Amer. Acad. Proc.* **42**, pag. 421, 1907.

Fournier M. Thérmomètre à vapeurs saturées. *Genie civil.* 13 Aprile 1907.

Adam J. Zur Bestimmung der Korrektion des heraussagenden Fadens von Quecksilberthermometern mit Hülfe des Fadenthermometers. *Zeit. für Instrkunde,* **27**, pag. 101, 1907.

Waidner C. W. and **Burgess G. K.** On the Etablishment of the High Temperature Scale. *Phys. Rev.* **24,** pag. 441, 1907.

4. Calorimetria.

Rudge W. A. D. Isometric specific Heat of CO_2 under high Pressure. *Cambridge Phil. Soc. Proc.* **14**, pag. 85, 1907.

Smith R. H. Specific Heat of Steam. *Eng. Rev.* **15**, pag. 161, 1907.

Zimmermann. Untersuchungen über Stäbe die durch längs gerichtete Kräfte belastet und in der Querrichtung in einzelnen Punkten elastisch gestützt sind. *Ak. der Wiss.* Berlin, 11 Aprile 1907.

Korn A. Sur les équations de l'élasticité. *Ann. scient. de l'Ecole Norm. Supér.* (3), **24**, N. 2, 1907.

Terrados E. Figure d'equilibrio d'un filo elastico. *An. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 39. Gennaio 1907.

Nicolai G. Fr. Die Gestalt einer deformierten Manometermembran experimentell bestimmt. *Archiv. f. Phys.* 1907, pag. 129.

4. Meccanica dei Liquidi. Capillarità.

Smoluchowski M. Contribution à la théorie du mouvement des liquides visqueux; en particulier des problèmes en deux dimensions. *Krak. Anz.* 1907, pag. 1.

Renard T. et **Guye A. P.** Mesures de tensions superficielles à l'air libre. *Journ. chim. phys.* **5**, pag. 81, 1907.

Hoskins L. M. Textbook on Hydraulics. London 1907.

5. Meccanica degli aeriformi.

Brunhes B. Action d'un courant aérien horizontal sur un tourbillon vertical. *Compt. Rend.* **144**, pag. 900, 1907.

Canovetti. Sur la résistance de l'air au mouvement des corps. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1030, 1907.

6. Apparecchi.

Stevenson R. Manostats. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 107, 1907.

Wolters H. Eine neue Sekunden. Registrieruhr. *Mechan.* **15**, pag. 17, 1907.

Giran H. Sur un cryoscope de précision. *Bull. soc. chim.* (4). **1**, pag. 290, 1907.

B. Fisica-chimica.

1. Generalità. Teoria. Pressione osmotica. Attrito interno.

André P. Ueber das Meldesche Phänomen. 32 pag. Diss. Bonn. 1907.

Magri G. Ricerche sopra il solvente H_2S liquefatto. *Rend. Acc. Lincei.* (5). **16**, pag. 518, 1907.

Battelli A. et **Stefanini A.** Sur la nature de la pression osmotique. *Journ. de phys.* (4). **5**, pag. 402, 1907.

Guye P. A. Application de la méthode des densités limites aux gaz permanents à 0°; constante des gaz parfaits. *Compt. Rend.* **144**, pag. 976, 1907.

Bose E. Ueber die physikalischen Eigenschaften von Emulsionen, insbesondere über deren Beziehung zu den kristallinischen Flüssigkeiten. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 347, 1907.

Bose E. Ueber die Ermittelung der Partialtensionen binärer Gemische aus Messungen der Totaltensionen und der einen Partialtension aus Messungen der anderen. *Phys. Zeit.* 8, pag. 352, 1907.

Dutoit P. Revue annuelle de Chimie physique. *Rev. génér. des Sciences.* 18, pag. 365, 1907.

Oliveira Pinto S. J. Cristalli liquidi. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 40, Febbraio 1907.

Mourelo R. J. Le soluzioni solide. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* N. 40, Febbraio 1907.

Roth W. A. Physikalisch-chemische Uebungen. Hamburg, L. Voss, 1907.

Puccianti L. Misure di viscosità sopra i cristalli fluidi del Lehmann. *Rend. Acc. Lincei,* (5), **16**, pag. 754, 1907.

Van der Ven E. La charge de contact entre une paroi poreuse et des solutions salines. *Arch. Musée Teyler.* (2), **10**, pag. 433, 1907.

Pauli W. Physical Chemistry in the Service of Medicine. IX 156 pag. London. Chapman and Hall. Ltd. 1907.

Tsakalotos D. E. Application de la loi de Trouton à la détermination des élévations moléculaires des points d'ébullitions des dissolutions. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1104, 1907.

2. Affinità. Solubilità. Assorbimento. Diffusione.

Konovaloff D. Sur l'action mutuelle des corps en dissolution d'après les données de leurs tensions de vapeur. *Journ. chim. phys.* 5, pag. 1, 1907.

Duclaux J. Recherches sur les substances collaidales. *Journ. chim. phys.* 5, pag. 29, 1907.

Vegard L. Contributions to the theory of Solutions. *Phil. Mag.* (6). **13**, pag. 589, 1907.

Thorp T. An apparent case of gaseous absorption caused by the action of a few milligrams of radiumbromide on the sides of a glass tube containing the radium. *Lit. and phil. Soc. Manch.* 26 Marzo 1907.

Travers M. W. Note on the absortion of gases, vapours, and substances from solution by solids and amorphous substances. *Asiatic Soc. of Bengal.* 3 Aprile 1907.

Nozari M. Sul colore delle soluzioni acquose di cloruro di rame in relazione con la dissociazione elettrolitica. *Atti Acc. Scienz. Torino* 27 Gennaio 1907.

Soddy F. Calcium as an Absorbent of Gases for the production of high Vacua. *Roy. Soc. Proc.* **78**, pag. 429, 1907.

Bruni G. e **Vanzetti B. L.** Sulla velocità di diffusione degli elettroliti. *Gazz. chim ital.* **37**, pag. 396, 1907.

Schreinemakers F. A. H. On a tetracomponent system with two liquid phases. *Proc. Amsterdam.* **9**. pag. 607, 1907.

Kohnstamm P. On metastable and unstable equilibria solid-fluid. *Proc. Amsterdam.* **9**, pag. 648, 1907.

Vorländer D. Substanzen mit mehreren festen und mehreren flüssigen Phasen. *Chem Ber.* **40**, pag. 1415, 1907.

3. Elettrochimica. Elettrolisi.

John H. Ueber die Wanderungsgeschwindigkeit der Jonen in verdünnten Lösungen. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. **641**, 1907.

Drucker K. Beweglichkeit von Jonen in Wasser. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 81, 1907.

Müller E. Eine praktische Form von Kohletiegeln für pyroelektrische Versuche. *Zeit. für Elektrochem.* **13**, pag. 108, 1907.

Huybrechts M. Sur la vitesse des ions des électrolytes. *Ann. de chim. et phys.* (8). **11**, pag. 68, 1907.

Pellat H. Détermination directe de la valeur absolue de la charge électrique d' un ion électrolytique monovalent. Diamètre d'un atome. *Compt. Rend.* **144**, pag. 902, 1907.

Kirpal A. Leitfähigkeitsmessungen an den isomeren Estersäuren der Chinolin und Cinchomeronsäure. *Ak. der Wiss. Wien.* 14 Marzo 1907.

Guyot J. Sur la théorie de Nernst et les chaînes liquides à extrémités identiques. *Compt. Rend.* **144**, pag. 832, 1907.

Levi M. G. e **Ageno F.** Ossidazioni elettrolitiche in presenza di fluoro-joni. *Gazz. chim. Ital.* **37**, pag. 368, 1907.

Rosset G. La repartition du courant dans les électrodes. *Éclair. électr.* **51**, pag. 228, 1907.

Guyot J. Sur la théorie de Nernst et la mesure des différences de potentiel au contact de deux solutions d'électrolytes. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1035, 1907.

Danneel H. Electrochemistry. 181 pag. New York. 1907.

Abegg R. The Electrolytic Dissociation Theory. VIII+180 pag. New York. 1907.

Nutton H. and **Law H. D.** The potential of Hydrogen liberated from metallic Surfaces. *Farad. Soc.* 19 Marzo 1907.

Hayden J. L. R. Alternating-current electrolysis. *Electrician.* **58**, pag. 969, 1907.

Schor J. und **Simek L.** Ueber elektrolytische Gleichrichtung von Wechselstrom. *Zeit. f. Elektrochem.* **13**, pag. 113, 1907.

Taylor A. H. A Method for the Determination of electrolytic Resistance and Capacity, using Alternating-Currents. *Phys. Rev.* **24**, pag. 402, 1907.

4. Fotochimica.

Bargellini G. e **Mieli A.** Influenza che esercita un sale in varie concentrazioni sulla velocità di decolorazione di soluzioni acquose di sostanze coloranti organiche sotto l'influenza della luce. *Gazz. chim. ital.* **37**, pag. 417, 1907.

Chapman D. L., Chadwick S. and **Ramsbottom J. E.** The chemical changes induces in gases submitted to the action of ultraviolet light. *Chem. Soc. London.* 2 Maggio 1907.

5. Termochimica.

Richards T. W. und **Forbes G. S.** Energieänderungen, die bei der Verdünnung von Zink-und Kadmiumamalgamen auftreten. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 683, 1907.

Lenoble E. Nouvelle formule pour la détermination de la puissance calorifique des combustibles. *Bull. soc. chim.* (4). **1**, pag. 111, 1907.

Holt A. The decomposition of Water Vapour in contact with Hot Platinum Wire. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 630, 1907.

Boudouard O. et **Le Chatelier H.** Sur la limite d'inflammabilité des mélanges de vapeur d'éther et d'air. *Compt. Rend.* **144**, pag. 910. 1907.

Kalm M. Sur la température de formation des carbures de Sr et de Ba. *Compt. Rend.* **144**, pag. 913, 1907.

Hutton R. S. and **Petavel J. E.** Electric Furnace Reaction under High Gaseous Pressures. *Roy. Soc. London.* 7 Marzo 1907.

Le Bas G. The relation between valency and heats of combustion. *Chem. Soc. London.* 2 Maggio 1907.

Dautriche. Vitesse de détonation des explosifs. *Compt. Rend.* **144**. pag. 1030, 1907.

Richards J. W. Thermochemistry. *Science.* (N. S). **25**, pag. 414, 1907.

Clark B. M. On the variation of the Heat of Mixture with Concentration und Temperature. *Science.* (N. S). **25**. pag. 527, 1907.

Meunier J. Sur les mélanges explosifs d'air et d'éther. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1107, 1907.

6. Struttura. Cristallografia.

Trautwine J. C. Summation of Stresses in Certain Structures. *Eng. Club. Phil. Proc.* **24**, pag. 123, 1907.

Lehmann O. Scheinbar lebende flüssige Kristalle. *Natur u. Schule.* **6**, pag. 111, 1907.

Lehmann O. Flüssige Kristalle und ihre Analogien zu den niedrigsten Lebewesen. *Kosmos.* **6**, N. 1-2, 1907.

C. Acustica.

1. Acustica fisica.

Martens F. F. Zur optischen Untersuchung von Stimmgabelschwingungen. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 111, 1907.

Martens F. F. Demonstration der Fortpflanzung der Schalles in einer Röhrenleitung. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 113, 1907.

Martens F. F. Demonstration von Schallschwingungen in Luft. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 116, 1907.

Abraham H. Rendement acoustique du téléphone. *Compt. Rend.* **144**, pag. 906, 1907.

Palla J. Ein neues Verfahren zur Aufnahme und Wiedergabe von Lauten. *Mechan.* **15**, pag. 1, 1907.

Waetzmann E. Objective Kombinationstöne and der singenden Bogenlampe. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 346, 1907.

2. Acustica fisiologica.

Meissner G. Klangaufnahmen an Blasinstrumenten, eine Grundlage für das Verständniss der menschlichen Stimme. *Arch. für d. ges. Physiol.* **116**, pag. 543, 1907.

Stücker N. Ueber die Unterschiedempfindlichkeit für Tonhöhen in verschiedenen Tonregionen. *Wien. Anz.* pag. 99, 1907.

Waetzmann E. Zur Helmholtzschen Resonanztheorie. *Phys. Zeit.* 8, pag. 307, 1907.

Abraham H. Sensibilité absolue de l'oreille. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1099, 1907.

3. Acustica musicale.

Terada T. Acoustical Investigation of the Japanese Bamboo Pipe, Syakuhati. *Journ. of the Coll. of Scienc. Imp. Univers. Tokyo.* XXI. N. 10, 1907.

4. Apparecchi.

Handke F. und **Martens F. F.** Demonstration der stehenden. Wellen in einer Pfeife durch Membranen mit seitlichem Spiegel. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 120, 1907.

Handke F. und **Martens F. F.** Ueber das Quinckesche Interferenzrohr mit zweien Schallwegen. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, 121, 1907.

D. Calore.

1. Teoria meccanica del calore.

Von **Mosengeil K.** Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum. *Ann. der Phys.* (4). **22**, pag. 867, 1907.

Van der Waals J. D. Contribution à la théorie des mélanges binaires. *Acad. des Scienc. Amsterdam.* 30 Marzo 1907.

Kamerlingh Onnes H. et **Keesom W. H.** Contribution à la connaissance de la surface ψ de van der Waals. XV. *Acad. des Scienc. Amsterdam.* 30 Marzo 1907.

V. Wesendonck K. Ueber den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie und die sogenannten Molekularbewegungen. *Naturw. Rund.* **22**, pag. 262, 1907.

2. Teoria cinetica della materia.

Mills J. E. Molecular Attraction. *Journ. phys. chem.* **11**, pag. 132, 1907.

Ehrenfest P. und **T.** Ueber zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmaunsche H-Theorem. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 311, 1907.

D'Auria L. A preliminary Communication concerning a new fundamental Principle of the kinetic Theory of Gaser. *Science*, (N. S). **25**, pag. 526, 1907.

Fisher W. J. The temperature coefficients of Gas Viscosity. *Phys. Rev.* **24**, pag. 385, 1907.

3. Dilatazione e termometria.

Kamerlingh Omnes H. und **Heuse W.** Ueber Messungen sehr tiefer Temperaturen. Ausdehnungskoeffizient des Jenaenser und Thüringer Glases. *Zeit. f. Kompr. u. flüss. Gase.* **10**, pag. 71, 1906.

Take E. Magnetische und dilatometrische Untersuchung der Umwandlungen Heuslerscher ferromagnetisierbarer Manganlegierungen. *Naturw. Rund* **22**, pag. 221, 1907.

Joly J. Absolute Dilatation of Mercury. *Roy. Dublin Soc. Proc.* **11**, **14**, pag. 179, 1907.

Smith A. W. Expansibility and Compressibility of Ether und Alcohols near their Boiling-points. *Amer. Acad. Proc.* **42**, pag. 421, 1907.

Fournier M. Thérmomètre à vapeurs saturées. *Genie civil.* 13 Apr.le 1907.

Adam J. Zur Bestimmung der Korrektion des heraussagenden Fadens von Quecksilberthermometern mit Hülfe des Fadenthermometers. *Zeit. für Instrkunde*, **27**, pag. 101, 1907.

Waidner C. W. and **Burgess G. K.** On the Etablishment of the High Temperature Scale. *Phys. Rev.* **24**, pag. 441, 1907.

4. Calorimetria.

Rudge W. A. D. Isometric specific Heat of CO_2 under high Pressure. *Cambridge Phil. Soc. Proc.* **14**, pag. 85, 1907.

Smith R. H. Specific Heat of Steam. *Eng. Rev.* **15**, pag. 161, 1907.

Wigand A. Gültigkeitsbedingungen des Gesetzes von Dulong und Petit. *Phys. Zeit.* 8, pag. 344, 1907.

Nordmeyer P. und **Bernoulli A. L.** Bestimmung der spezifischen Wärme einiger Elemente, Legierungen und Verbindungen zwischen: — 185° und + 20°. *Verh. der D. phys. Ges.* 5, pag. 175, 1907.

Aufhäuser D. Ueber eine Methode der Bestimmung der specifischen Wärme von Oel auf elektrischem Wege. *Chem. Rev. Fett-u. Harz-Ind.* 14, pag. 57, 1907.

5. Cambiamenti di stato. Proprietà dei vapori e dei gaz.

Tandler R. Studie zur Verdampfung. *Zeit. für phys. Chem.* 58, pag. 753, 1907.

Barus C. The equations of the Fog Chamber. *Phys. Rev.* 24, pag. 383, 1907.

Briner E. et **Cardoso E.** Recherches sur les compressibilites et les tensions de vapeur des mélanges d'oxyde de méthyle et d'acide sulfureux. *Compt. Rend.* 144, pag. 911, 1907.

Olszewski K. Inversionstemperatur der Joule-Thomsonschen Erscheinung für Luft und für Stickstoff. *Zeit. für Kompr. u. flüss. Gase.* 10, pag. 69, 1907.

Barus C. Changes of the Colloidal Nucleation of Dust-free Wet Air in the Lapse of Time. *Sill. Journ.* (4), 23, pag. 202, 1907.

Sutton J. R. Evaporation from Water surfaces. *Roy. Dublin Soc. Proc.* 11, 13, pag. 137, 1907.

Baxter G. P., Hickley C. H. and **Holmer W. C.** Der Dampfdruck von Jod. *Journ. Amer. Chem. Soc.* 29, pag. 127, 1907.

Du Bois H. The Vapor Pressure of Solid Carbonic Acid. *Phys. Rev.* 24, pag. 445, 1907.

6. Sorgenti di calore.

7. Conducibilità termica.

Macchia P. Ricerche ulteriori sopra la conducibilità termica a basse temperature. *Rend. Acc. Lincei.* (5), 16, pag. 507, 1907.

Searle G. F. C. A method of determining the thermal conductivity of india rubber. *Cambridge. Phil. Soc.* 28 gen. 1907.

Bouvier H. Erhöhtes Wärmeleitungsvermögen der Luft im gepressten Zustande. *Ak. der Wiss. Wien.* 7 Marzo 1907.

Picciati L. Sull'equazione della propagazione del calore in un filo. *Rend. Acc. Lincei.* (5), 16, pag. 750, 1907.

Koenigsberger J. Ueber die Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Gesteinen und den Einfluss verschiedener Wärmeleitfähigkeit auf die Geoisothermen. *Zentralbl. f. Min.* 1907, pag. 200.

8. Calore raggiante.

9. Apparecchi ed applicazioni termiche.

Dutoit C. Machine à liquefier l'air. *Compt. Rend. Soc. Vand.* 6 Febbr. 1907.

Thiele J. Ein neuer Apparat zur Schmelzpunktsbestimmung. *Chem. Ber.* **40**, pag. 996, 1907.

Crebs. Sur l'appareil à mesurer le debit d'essence dans les moteurs a pétrole. *Compt. Rend.* **144**, pag. 906, 1907.

Claude G. Sur les deux modes de détente employé dans la liquefaction de l'air. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1037, 1907.

E. Ottica.

1. Teoria. Generalitá.

Cajal S. R. Ueber die Polycromie mikroskopischer Metallkörnchen. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 137, 1907.

Mendizabal A. Note d'ottica. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 40. Febbraio 1907.

Morley E. W. and **Miller D. C.** Final Report on Etherdrift Experiments. *Science* (N. S). **25**, pag. 525, 1907.

Comstock F. D. Reason for believing in an ether. *Science* (N. S), **25**, pag. 432, 1907.

Poynting J. H. Pressure of Light. London. 1907.

2. Propagazione della luce, riflessione, rifrazione, dispersione, assorbimento, emissione.

Lyman T. The absorption of some solids for light of extremely short wave-lengths. *Astrophys. Journ.* **25**, pag. 45, 1907.

Rudorf G. Die Lichtabsorption in Elektrolyten. *Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron.* **3**, pag. 422, 1907.

Nasini R. Azioni ottiche di gruppi atomici non saturi in immediata vicinanza. *Rend. Acc. Lincei.* (5). **16**, pag. 810, 1907.

Wood R. W. A Hydraulic Analogy of Radiating Bodies for Illustrating the Luminosity of the Welsbach Mantle. *Phys. Rev.* **24**, pag. 436, 1907.

3. Spettroscopia.

Conway A. W. Series in spectra. *Roy. Soc. Dublin.* 19 Febbraio 1907.

Jück R. und **Retschinsky T.** Untersuchung über selektive Absorption im Quecksilberlichtbogen. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 852, 1907.

Pollock J. H. and **Leonard A. G. G.** The quantitative spectra of Ba. Sr. Ca. Mg. K and Na. *Roy. Dublin Soc.* 23 Aprile 1907.

Julius W. H. Longueurs d'onde des maxima d'émission et d'absorption dans le spectre ultra-rouge trouvées antérieurment. *Acad. des scienc. Amsterdam.* 30 Marzo 1907.

Jones H. C. and **Uhler S. H.** The absorption spectra of certain salts in acqueous solutions as affected by the presence of certain other salts with larges hydrating power. *Amer. Chem. Journ.* **37**, pag. 207, 1907.

Exner F. Ueber Spektralanalyse. *Lieb. Ann.* **351**, pag. 12, 1907.

De Gramont A. Sur les raies ultimes ou de grande sensibilité des métaux, dans les spectres de dissociation. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1101, 1907.

4. Sorgenti luminose. Fotometria.

Winkler E. Ulbricht's Globe Photometer. *Schweiz. Elektr. Zeit.* **4**, pag. 85, 97, 110, 1907. *(Science Abstracts.* B. **10**, pag. 183, 1907).

Swinburne J. Incandescent Illuminants. *Nature.* **76**, pag. 92, 1907.

5. Luminescenza.

De Kowalskj J. Some Applications of the Theory of Electrons to the Theory of Phosphorescence. *Phil. Mag.* (6). **13**, pag. 622, 1907.

Wick F. A spectrophotometric Study of the Absorption and Fluorescence of Resorufin. *Phys. Rev.* **24**, pag. 256.

Merritt E. Note an the Fluorescence of Sodium Vapor. *Phys. Rev.* **24**, pag. 379, 1907.

De Kowalskj J. et **Garnier C.** Sur la phosphorescence des terres rares. *Compt. Rend*, **144**, pag. 836, 1907.

Bruninghaus L. La phosphorescence des composée calciques manganésifères. Determination de l'optimum. *Compt. Rend.* **144**, pag. 839, 1907.

Karl A. Sur la triboluminescence de substances contenant du zinc. *Compt. Rend.* **144**, pag. 841, 1907.

Bruninghaus L. Sur la phosphorescence des composée calciques manganésifères. Influence de la constitution et de la masse des molécules sur les longueurs d'ondes des radiations émises. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1040.

Wick F. G. Fluorescence Absortion in Resorufin. *Phys. Rev.* **24**, pag. 407, 1907.

6. Fotografia.

Wandersleb E. Ueber die Verzeichnungsfehler photographischer Objektive. *Zeit. für Instrkund.* **27**, pag. 75, 1905.

Schaum K. und **Schloemann E.** Ueber die Farben ungetonter photographischer Schichten. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 109, 1907.

Lumière A. und **L.** und **Seyewetz A.** Beitrag zum Studium der Rolle der Alkalien in der organischen Entwicklern. *Zeit. für wiss. Phot.* **5**, pag. 126, 1907.

Sheppard G. E. and **Mees C. E. K.** Action of Substances on the latent Image. *Phot. Journ.* **47**, pag. 63, 1907.

Lumière A. and **L.** and **Seyenvetz.** Limits of Useful Work in the Fixing Bath. *Phot. Journ.* **44**, pag. 129, 1907.

Villard P. Sur les actions chimiques de la lumière. *Journ. de Phys.* (4). **6**, pag. 369, 1907.

Poincet M. Sulla fotografia di un oggetto in moto a grande velocità. *Technique Automobile.* Feb. 1907. *(Boll. Soc. Aer. It.* **4**, pag. 196, 1907).

7. Interferenza. Diffrazione.

Barus C. Polarisation and interference phenomena with white light. *Science.* **25**, pag. 350, 1907.

Barus C. Colour Diagram for Interference and Polarisation Phenomena. *Science.* **25**, pag. 348, 1907.

Strehl K. Einführung in die beugungstheoretische Optik. *C. Zeitg. f. Opt. u. Mech.* **28**, pag. 1, 15, 27, 39, 53, 1907.

8. Ottica dei cristalli, birifrangenza, polarizzazione.

Cornu F. Ueber Pleochroismus, erzeugt durch orientierenden Druck am blauen Steinsalz und Sylvin. *Zentralbl. f. Min.* pag 166, 1907.

Filon L. N. G. On the Dispersion in Artificial double Refraction *Roy. Soc. London.* 28 Feb. 1907.

9. Rotazione del piano di polarizzazione.

Guye P. A. und **Gautier M.** Ueber das Prinzip der optischen Superposition. *Zeit. für phys. Chem.* **58**, pag. 659, 1907.

Fischer E. und **Jacobs W. A.** Ueber die optisch-aktiven Formen des Serins, Isoserins, und der Diaminopropionsäure. *Chem. Ber.* **40**, pag. 1057, 1907.

Fischer E. und **Baske K.** Gegenseitige Umwandlung der optisch-aktiven Brombernsteinsäure und Asparaginsäure. *Chem. Ber.* **40**, pag. 1051, 1907.

Schönrock O. Optischer Schwerpunkt von Lichtquellen in der Polarimetrie. *Zeit. d. Ver. D. Zucker Ind.* **57**, pag. 117, 1907.

Patterson T. S. and **Thomson D.** Ueber das Drehungsvermögen in Lösungen. *Chem. Ber.* **40**, pag. 1243, 1907.

10. Ottica fisiologica.

Prrats Aymerich J. Determinazione dei colori di contrasto. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 40. Febbraio 1907.

Kalm R. H. Ueber Tapetenbildes. *Archiv. f. Phys.* pag, 56, 1907.

II. Apparecchi.

— Koinzidenz Telemeter der Firma C. Zeiss in Jena. *Deut. Mech. Zeit.* pag. 61, 1907.

Lippmann G. Collimateur suspendu donnant la position du Zenith. *Compt. Rend.* **144**, pag. 873, 1907.

Quidor A. et **Nachet A.** Sur un nouveau microscope et ses applications à la microphotographie stéréoscopique. *Compt. Rend.* **144**, pag. 908, 1907.

Nakamura G. On a quartz half shadow polarisation apparatus. *Proc. Tokyo Math phys. Soc.* **4**, pag. 26, 1907.

Hartwig Th. Das Stereoskop und seine Anwendungen. IV+70 pag. Leipzig. B. G. Teubner, 1907.

Hale G. E. Vertical Coelostat Telescop. *Astrophys. Journ.* **25**, pag. 68, 1907.

Bourgeois L. Sur quelques instruments d'optique d'un usage courant dans les laboratoires. Paris. Hachette, 1907.

Culmann M. Spectrographe pour le spectre visible et ultraviolet. *Radium.* **4**, pag. 154. 1907.

F. Magnetismo.

1. Generalità. Teoria.

Heydweiller A. Ueber das System der gekreuzten Magnete und seine Verwendung. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 302, 1907.

Schmidt A. Ueber die Bestimmung des allgemeinen Potentials beliebiger Magnete und die darauf begründete Berechnung ihrer gegenseitigen Einwirkung. *Berl. Ber.* 1907, pag. 306.

Gans R. Kritische Beobachtungen und Ergänzungen zur Theorie des Ferromagnetismus. *Elekt. Zeit.* **28**, pag. 527, 1906.

2. Misure. Apparecchi.

Hill B. V. On the magnetic Behaviour of certain Nickel alloys. *Phys. Rev.* **24**, pag. 321, 1907.

Maurain C. Sur l'action de la torsion sur l'aimantation. *Journ. de Phys.* (4), **6**, pag. 380, 1907.

Wedekind E. Magneto-chemische Untersuchungen. *Chem. Ber.* **40**, pag. 1259, 1907.

G. Elettricità.

1. Teoria.

Lodge O. Electrons, or the Nature and Properties of negative Electricity. 246 pag. London, 1907.

Schott G. A. Ueber ein neues Experimentalproblem der Elektronentheorie. *Phys. Zeit.* 8, pag. 292, 1907.

Comway A. W. Electromagnetic Mass. *Roy. Dublin Soc. Trans.* 9, 5, pag. 51, 1907.

Soddy F. Is the electronic Theory of Matter legitimate? *Nature.* 76, pag. 25, 1907.

Rosset G. Vibration ordinaire sinusoidale et vibration ionique. *Éclair. électr.* **51**, pag. 184, 1907.

Whetham W. C. D. Die Theorie der Experimental-Elektrizität. VIII+358 pag. Leipzig. J. A. Barth. 1907.

Gans R. Elektrostatik und Magnetostatik. *Encyklop. d. math. Wiss.* **5**, [2]. pag. 289, 1907.

Richardson O. W. The structure of the Ether. *Nature.* **76**, pag. 78, 1907.

2. Elettrostatica. Macchine elettriche.

Trouton F. T. and **Sidney Russ.** The Rate of Recovery of Residual Charge in Electric Condensers. *Phil. Mag.* (16). **13**. pag. 1578, 1907.

Beaulard F. Sur la constante diélectrique de la glace et de l'eau au voisinage de 0°. *Compt. Rend.* **144**, pag. 904, 1907.

Monasch E. Ueber den Energieverlust in Dielektrikum in wechselnden elektrischen Feldern. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 905, 1907.

3. Scariche elettriche attraverso conduttori e dielettrici.

Geiger H. Strahlung -, Temperatur -, und Potential-messungen in Entladungsröhren bei starken Strömen. *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 973, 1907.

Pribram K. Büschel - und oszillierende Spitzenentladung in Helium, Argon und anderen Gasen. *Ak. d. Wiss. Wien.* 21 Marzo 1907.

Argyropoulos T. Sur un condensateur parlant. *Compt. Rend.* **144**, pag. 971, 1907.

Deprez M. Théorie du condensateur parlant de M. Argyropoulos. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1012, 1907.

Jona E. Sulla rigidità dielettrica dell'aria liquida. *Atti Ass. Elettr. Ital.* **11**, pag. 47, 1907.

4. Sorgenti di elettricità. Polarizzazione.

Pécheux H. De la mesure de la résistance d'une pile en circuit fermé par la méthode de Mance. *Éclair. électr.* **51**, pag. 145, 1907.

Reimganum M. Beitrag zu einer elektrolytischen Selenzelle. *Phys. Zeit.* 8, pag. 293, 1907.

Hesehus N. Gegenwärtigér Stand der alten Frage nach der Ursache der Kontaktelektrizität. *Journ. d. russ. phys. chem. Ges.* **39**, pag. 37, 1907.

Hesehus N. Thermo - und Berührungselektrizität. *Journ. d. russ. phys. chem. Ges.* **39**. pag. 1, 1907.

5. Conducibilità. Resistenza.

Broniewski W. Resistance électrique et dilatation des metaux. *Journ. chim. phys.* **5**, pag. 57, 1907.

Williams W. E. On the Influence of Stress on the Electrical Conductivity of Metals. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 635, 1907.

Niccolai G. Sulla resistenza elettrica dei metalli fra temperature molto alte e molto basse. *Rend. Acc. Lincei.* (5). **16**, pag. 757, 1907.

Crocker F. B. Resistivity-temperature formulae for copper. *Electrician.* **58**, pag. 968, 1907.

Dumermuth M. Ueber die Widerstandsänderungen des Eisens durch longitudinale Magnetisierung verschiedener Art. Diss. Zürich. 1907.

Adams E. P. The Effect of a Transverse Magnetic Field on Metallic Resistance. *Phys. Rev.* **24**, pag. 428, 1907.

6. Fenomeni termici.

Sano S. Theory of Thermoelectricity. *Proc. Tokyo. Math. Phys. Soc.* **4**, pag. 2, 1907.

Castorina G. Ricerche termoelettriche sul fenomeno Le-Roux. *Boll. Ac. Gioenia.* Gen. 1907, pag. 27.

White W. P. Die Konstanz der Thermoelemente. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 325, 1907.

Cermak P. Der Peltiereffekt Eisen Konstantan zwischen 0° und 560°. *Wien. Anz.* 1907. pag. 114.

Hesehus N. Thermo-und Berührungselektrizität. *Journ. d. russ. phys. chem. Ges.* **39**, pag. 1, 1907.

7. Fenomeni luminosi.

Lilienfeld J. E. Ueber neuartige Erscheinungen in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 125, 1907.

Biegon von Czudnochowski W. Selbsttätig sich einstellende Vakuumskala, *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 136, 1907.

Cady W. G. The Hissing Point of the metallic Arc. *Phys. Rev.* **24**, pag. 381, 1907.

8. Elettromagnetismo, para e diamagnetismo.

9. Elettrodinamica e induzione.

Crudeli U. Deduzioni tratte dal comportamento del bismuto nel campo magnetico. *Atti Ass. Elettr. Ital.* **11**, pag. 63, 1907.

10. Oscillazioni elettriche.

Glatzel Br. Messungen in Schwingungskreisen. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 150, 1907.

Granquist G. Untersuchungen über den selbsttönenden Wellenstromlichthogen. *Nova Acta Soc. Upsala.* (4), **1**. N. 5, 1907.

Bangert K. W. Versuche zum Nachweis der magnetischen Kraft bei elektromagnetischen Wellen auf Drähten. 60 pag. Diss. Marburg. 1907.

Kiebitz F. Interferenzversuche mit freien Hertzschen Wellen. *Ann. der Phys.* (4). **22**, pag. 943, 1907.

Battelli A. Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den elektrischen Leitungswiderstand der Solenoide für Ströme hoher Frequenz. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 296, 1907.

Battelli A. und **Magri L.** Die oszillatorische Entladung in Eisendrähten. *Phys. Zeit.* **8**, pag. 298, 1907.

Cole A. D. The diffraction of Electric Waves of Short Wavelenght. *Science* (N. S) **25**, pag. 525, 1907.

Schaefer C. Reflection and Transmission of Electric Waves by Resonator Gratings. *Phys. Rev.* **24**, pag. 421, 1907.

11. Magneto-ed elettro-ottica.

Jaumann G. Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern. *Wien. Anz.* pag. 78, 1907.

Harris W. D. Rotation and Elliptic Polarisation produced by Iron films in a magnetic Field. *Phys. Rev.* **24**, pag. 537, 1907.

Hull G. F. An investigation of the influence of electrical fields upon spectral lines. *Astrophys. Journ.* **25**, pag. 1, 1907.

Stark J. On the radiation of canal rays in hydrogen. *Astrophys. Journ.* **25**, pag. 23, 1907.

Perkin W. H. The magnetic rotation of Hexatriene and its relations hip to benzene and other aromatic compounds, also its refractive power. *Chem. Soc. London.* 18 Aprile 1907.

Becquerel J. Sur les changements des bandes d'absorption des crystaux et la loi de variation de l'amortissement du mouvement des électrons absorbants à diverses temperatures. *Compt. Rend.* **144**, pag. 1032, 1907.

12. Raggi Catodici, Röntgen, ecc.

Thomson J. J. On Rays of Positive Electricity. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 561, 1907.

Adams J. M. Note on a Spectrum of the Röntgen Rays from a Focus Tube, ond the relatively Selective Absorption of Röntgen Rays in certain Metals. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 576, 1907.

Villard P. Sur la lumière positive et l'expérience de Melde. *Compt. Rend.* **144**, pag. 834, 1907.

Wind C. H. Une hypothèse sur l'origine des rayons Röntgen. *Acad. des Scienc. Amsterdam.* 30 Marzo 1907.

Thomson J. J. Röntgen; Kathode and Positive Rays. *Electrician.* 58, pag. 977, 1907.

Adams J. M. The Transmission of Röntgen Rays through Metallic Sheets. *Science* (N. S). **25**, pag. 528, 1907.

Tucker W. S. The influence of pressure upon convection currents, and a criticism of J. Stark 's relation between katode fall of potential and temperature. *Phys. Soc. London.* 26 Aprile 1907.

Perry C. C. On the current carried by Canal Rays in a Discharge Tube. *Phys. Rev.* **24**, pag. 447, 1907.

13. Radioattività e ionizzazione.

Gruner P. Aperçu général de la désaggrégation radioactive de la matière. *Arch. des scienc. phys. et nat.* (4), **23**, pag. 329, 1907.

Biegon von Czudnochowski W. Bemerkungen zur Geschichte unserer Kenntnis von der Jonisierung der Gase sowie über einen Demonstrationsversuch betr. die Jonisierung von Luft durch glühende Körper. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 145, 1907.

Raveau. Exposé des recherches récentes sur les transformations des corps radioactifs, *Soc. franc. de Phys.* N. 258, pag. 2, 1906.

Campbell N. The Effect of Change of Temperature on Spontaneous Ionisation. *Phil. Mag.* (6), **13**, pag. 614, 1907.

Horton F. Sur la décharge de l'électricité négative par le Calcium chaud et par la chaux. *Electrician.* 5 Aprile 1907. *(Éclair. électr.* **51**, pag. 163, 1907).

Elster J. und **Geitel H.** Ueber die Radioaktivität des Bleies. II. *Phys. Zeit.* 8, pag. 273, 1907.

Hahn O. Ein neues Zwischenprodukt im Thorium. *Phys. Zeit.* 8, pag. 271, 1907.

Accolla G. Sulla radioattività di alcune rocce e terre. *Boll. Ac. Gioenia.* Gen. 1907, pag. 22.

Frommel C. W. Radioaktivität. Leipzig. G. J. Goeschen, 1907.

Ladenburg E. Ueber den photoelektrischen Effekt bei hoben Temperaturen. *Verh. D. phys. Ges.* **5**, pag. 165, 1907.

Ramsay W. The chemical action of the radium emanation. I. action on distilled water. *Chem. Soc. London.* 2 Maggio 1907.

Joly J. Pleochroic halos. *Roy. Dublin Soc.* 23 Aprile 1907.

Blanc G. A. Die Zerfallskonstante des Radiothoriums. *Phys. Zeit.* 8, pag. 321. 1907.

Greinacher H. und **Kernbaum M.** Ueber das gasförmige Umwandlungsprodukt des Poloniums. *Phys. Zeit.* 8, pag. 339, 1907.

Munoz del Castillo J. Osservazioni critiche sulle ipotesi della disintegrazione atomica e della dissociazione molecolare chimico-fisica. *Anal. de la Soc. Espanola di Fisica y Quimica.* V. N. 29. Gennaio 1907.

Munoz del Castillo J. Radioattività dei liquidi provocata dalla emanazione dei minerali attivi di San Rafael de El Espinar. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica et Quimica.* V. N. 39. Gennaio 1907.

Munoz del Castillo J. Studio preliminare sull'estinzione dell'attività delle acque minerali spagnole radioattive. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 39. Gennaio 1905.

Munoz del Castillo J. Sull'attività delle acque di Villahasta. *Anal. de la Soc. Espanola de Fisica y Quimica.* V. N. 40. Febbraio 1907.

Büchner E. H. Die Zusammensetzung des Thorianits und die relative Radioaktivität seiner Bestandteile. *Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron.* **3**, pag. 372, 1907.

Elster J. und **Geitel H.** Ueber die Radioaktivität der Erdsubstanz und ihre mögliche Beziehung zur Erdwärme. *Beilage zum Jahr. Ber. des Herzog. Gymn. zu Wolfenbüttel.* 1907.

Strong W. W. Effect of a Magnetic Field upon the Jonisation in a closed Vessel. *Science* (N. S). **25**, pag. 522, 1907.

Gates F. C. On the conductivity of the Air caused by certain Compounds during Temperature-Change. *Science* (N. S). **25**, pag. 528, 1907.

Bermbach. Elektronen und Radium. *Zeit. d. Verb. d. Ing.* **51**, pag. 510, 1907.

Berthelot M. Ueber die chemischen Wirkungen des Radiums. *Lieb. Ann.* **351**, pag. 504, 1907.

Halm O. Der Zerfall der radioaktiven Elemente. 32 pag. Berlin, 1907.

Halm O. Ein neues Zwischenprodukt im Thorium. *Chem. Ber.* **40**, pag. 1462, 1907.

Garrett A. E. Electrical conduction produced by heating salts. *Phys. Soc. London.* 26 Aprile 1907.

Bloch L. Sur le parcours des rayons α de l'Uranium. *Radium.* 4, pag. 133, 1907.

Razet P. Sur la concentration du polonium. *Radium.* 4, pag. 135, 1907.

Godlewski T. Recherches sur le proprietès de l'actinium. *Radium.* 4, pag. 139, 1907.

Gold E. La mobilité des ions négatifs dans les flammes. *Radium.* 4, pag. 157, 1907.

14. Elettrotecnica. Telefonia e Telegrafia.

Starke H. Demonstrationen von Phasendifferenzen im Winkelmass. *Verh. d. deut. phys. Ges.* **5**, pag. 160, 1907.

Righi A. und **Dessau B.** Die Telegraphie ohne Draht. 2 Aufl. XIV+665 pag. Braunschweig. Vieweg. u. Sohn. 1907.

Sahulka J. Messung des Isolationswiderstandes und der kapazität der einzelnen Leiter von Wechelstrom-Anlagen während des Betriebes. *Elektr. Zeit.* **28**, pag. 457, 1907.

Maurain Ch. Les détecteurs magnètiques. *Rev. électr.* **7**, N. 78, 1907.

Vaege W. Ueber die Licht-and Wärmeenergie von Glühlampen. *Phys. Zeit.* 8, pag. 306, 1907.

Hazeltine L. A. Harmonic Analysis of alternating-current Waves. *Electr. Rev. N. Y.* **50**, pag. 235, 1907.

Devaux-Carbonnel. Experimental Study of Lines and Telegraphic Apparatus. *Soc. Inter. Élect. Bull.* **7**, pag. 71, 1907. (*Science Abstracts.* B. **10**, pag. 189 1907).

Short A. R. Gott 's Manganin Arm. *Electrician.* **58**, pag. 816, 1907.

Eccles W. H. Detectors for Wireless Telegraphy. *Electr. Engin.* **1**, pag. 252, 1907.

Kintner S. M. Wireless Telegraph Receivers. *Am. Inst. Elec. Eng. Proc.* **26**, pag. 65, 1907.

— Telephone Dictating Apparatus. *West. Elect.* **40**, pag. 231, 1907.

Blondel A. Sur la décharge des condensateurs alimentés par courants alternatifs et sur le règlage des transformateurs à la resonance. *Éclair. électr.* **51**, pag. 217, 1907.

Armagnat H. La télephotographie. *Industrie électr.* **16**. 10 Aprile 1907.

Devaux Charbonnel Vitesse de fonctionnement des appareil telégraphques rapides. *Soc. franc. de Phys.* 15 Marzo 1907.

Gáti Bèla. Measurement of Energy in wireless telegraphy. *Electrician.* **58**, pag. 982, 1907.

15. Unità.

16. Misure. Apparecchi.

Schultze H. Ein neues Quadrantenelektrometer für dynamische Messungen. *Zeit. für Instr. Kunde.* **27**, pag. 65, 1907.

Cole A. D. Der Wehnelt-Unterbrecher in Verbindung mit dem Righi - Oszillator. *Electrician.* **58**, pag. 21. (*Élekt. Zeit.* **28**, pag. 465, 1907).

Longden A. C. The percentage Bridge. *Phys. Rev.* **24**, pag. 349, 1907.

Lohmann H. Beobachtungen zur Herstellung und Messung hoher Spannungen *Ann. der Phys.* (4), **22**, pag. 1008, 1907.

Barletti A. L'audion, nuovo detector per onde elettriche - sistema De Forest. *Elettricista.* (2), **6**, pag. 120, 1907.

— New Method of Operating Mercury Vapour Electric Apparatus. *Engineer.* **103**. pag. 358, 1907.

Blondel A. Quecksilber Strahl Unterbrecher für Wechselstrom. *Mech.* **15**, pag. 13, 1907.

Weiss P. Electro-aimant de grande puissance. *Journ. de Phys.* (4). **5**, pag. 353, 1907.

Biegon von Czudnochowski W. Schaltvorrichtung für Vakuumapparate zur Demonstration elektrischer Entladungserscheinungen. *Verh. d. r D. phys. Ges.* **5**, pag. 186, 1907.

Korolkow A. Elektrischer Ofen zu Projektionsversuchen. *Journ. d. russ. phys. chem. Ges.* **39**, pag. 32, 1907.

Roller J. W. Electric and magnetic measurements and measuring Instruments. 398 pag. New York. 1907.

Kennelly A. E. and **Witing S. E.** On an approximate measurement, by electrolytic means, of the electrostatic capacity between a vertical metallic cylinder and the ground. *Electrician.* **58**, pag. 929, 1907.

Canter O. Verbesserung des elektromagnetischen Hammers. *Elekt. Zeit.* **28**, pag. 534, 1907.

Moulin M. L'électromètre à quadrants. *Radium.* **4**, pag. 145, 1907.

Knipp C. T. The Temperature of the Mercury Arc. *Phys. Rev.* **24**, pag. 446, 1907.

H. Fisica terrestre e Meteorologia.

1. Generalità. Teorie.

Joly J. Radium and Geology. *Nature.* **76**, pag. 8-55, 1907.

De Marchi L. Applicazioni geologiche della Teoria elastica delle dislocazioni tectoniche. *Rend. Acc. Lincei* (5), **16**, pag. 499, 1907.

Spariosu B. Wissenschaftlich begründete Wetterprognose für das Jahr 1907. Kremsmünster.

Börnstein R. Wetterdienst. *Wetter.* **24**, 2 pag. 48, 1907.

Meissner O. Die Bedeutung von Morgen-und Abendröthe für die Lokalprognose von Niederschlägen. *Wetther.* **24**, 2, pag. 41, 1907.

Hoff E. Elementare Theorie der Sonnentiden. *Ann. d. Hydr.* **35**, 3, pag. 122, 1907.

Halbfass W. Der Heutige Stand der Seichesforschung. *Zeit. Ges. Erdkde.* Berlin. N. 1, 1907.

Honda K. Seiches in Lake Chiuzenji. *Phys. Math. Soc. Tokyo.* **3**, 11, pag. 220, 1907.

Fischer O. Radium and Geology. *Nature.* **76**, pag. 31, 1907.

D' Arcy Thompson W. The Temperature of the North Sea. *Nature.* **76**, pag. 4 ., 1907.

Ekholm N. Ueber die unperiodischen Luftdruckschwankungen und einige damit zusammenhängende Erscheinungen. *Met. Zeit.* **24**, pag. 145, 1907.

Conrad V. Bildung und Konstitution der Wolken. *Met. Zeit.* **24**, pag. 159, 1907.

Hennig R. Die Wetterrose. Berlin. O. Salle, 1907.

Holdefleiss P. Witterungskunde für Landwirte Stuttgart. E. Ulmes, 1907.

Zappa G. Sullo spostamento che la marea dell'Adriatico può cagionare agli strumenti dell'Osservatorio astronomico di Padova. *Rend. Acc. Lincei.* (5) **16**, pag. 625, 1907.

Barus C. Changes of the Colloidal Nucleation of Dust-free Wet Air in the Lapse of Time. *Sill. Journ.* **23**, pag. 135, 202, 1907.

Börnstein R. Wetterdienst. *Wetter.* **24**, 3, 72, 1907.

Fisher O. Radium and Geology. *Nature.* **76**, pag. 78, 1907.

2. Geodesia. Misure geodetiche e di gravità.

Pizzetti P. Corollari del teorema relativo al paragone fra due triangoli geodetici di eguali lati, *Rend. Acc. Lincei.* (5). **16**. pag. 454, 1907.

Guillaume C. E. La base géodésique du Simplon. *Soc. franc. de Phys.* N. 258, pag. 5, 1907.

3. Magnetismo terrestre. Correnti telluriche. Luce polare.

Mathias E. Recherche de la loi de distribution régulière des éléments magnétiques d'une contrée à date fixe. *Ann. de chim. et phys.* (8). **11**, pag. 5, 1907.

— Starkes Nordlicht am 6 Februar 1907. *Wetter.* **24**, 2 pag. **44**, 1907.

Baumgardt L. Ueber eine Wechselwirkung zwischen der Erde und einem Pendel. *Phys. Zeit.* 8, pag. 303, 1907.

Cirera et **Balcelli.** Étude des rapports entre l' activité solaire et les variations magnétiques et électriques enregistrées à Tortose. *Compt. Rend.* **144**, pag. 959, 1907.

Schmidt A. Der säkulare Gang der magnetischen Deklination von 1890 bis 1906 mach den Beobachtungen des Observatoriums

zu Potsdam. *Berlin Zweigverein der D. Meteor. Ges.* Jahresbericht 1907. Berlin.

Steen A. S. Report of the Second Norwegian Arctic Expedition in the « Fram ». 1898-1902. N. 6. Kristiania, 1907.

Chree C. Report on arctic magnetic Observations. *Nature.* 76, pag. 91, 1907.

Croft W. B. Solenoids whic will move under the action of the earth's magnetic field. *Phys. Soc. London.* 26 Aprile 1907.

4. Studio dell'alta atmosfera.

Lancaster A. Les lancers de ballons-sondes du Service météorologique de Belgique. *Bull. Scienc. Acad. royale de Belg.* N. 11, 1907.

Shaw W. The use of Kites in meteorological research. *Aëron. Journ.* Gennaio 1907.

Perléwitz P. Hohe Drachenaufstieg in Hamburg. *Ann. d. Hydr.* 35. 3. pag. 134, 1907.

Coim A. Die Erscheinungen der oberen Luftschichten im Januar. 1907. *Wetter.* 24, 2, pag. 39. 1907.

Linke F. Ueber meteorologische Drachenaufstiege auf Samoa. *Met. Zeit.* 24, pag. 173, 1907.

Burgatti P. Sulle traiettorie degli aerostati naviganti in aree cicloniche. *Boll. Soc. Aer. It.* 4, pag. 150, 1907.

5. Meccanica e termodinamica dell'atmosfera. Venti.

Kaiser M. Historische Entwickelung unserer Kenntniss der Land- und Seewinde auf der Erde. *Wetter.* 24, 2, pag. 25, 1907.

Kaiser M. Land-und Seewinde an der deutschen Ostseeküste. *Ann. d. Hidr.* 35, 3, pag. 113, 1907.

Streit A. Das Wesen der Zyklonen und ihre besonderen Erscheinungsformen als Hagelwetter und Gewitter. Wien. Hof. u. Staatsdruckerei, 1907.

Köppen W. Zur Theorie der täglichen Periode der Windstärke. *Met. Zeit.* 24 pag. 66, 1907.

Arctowski H. Variation de la vitesse du vent due aux marée atmosphériques. *Bull. d Soc. Belg. d'astronomie.* 1907.

Hildbrandsson H. H. et **Tisserenc de Bort L.** Les bases de la météorologie dynamique. 3.me livraison. Paris, 1907.

Meyer G. Studien über Mondwirkungen auf die Bahnrichtung der barometrischen Minima. *Gaea.* Heft 4, 1907.

Wahlburg E. Die Antizyklone der letzten Januardekade 1907. *Wetter.* 24, 3, pag. 68, 1907.

6. Ottica dell'atmosfera.

Leyst E. Höfe um Sonne und Mond in Russland. *Bull. Soc. Imp. d. Nat. de Moscou.* N. 1-2, pag. 1, 1907.

Kesslitz W. Halophänomen in Pola. *Met. Zeit.* **24**, pag. 174. 1907.

Busch F. Der Bishopsche Ring in den Jahren 1905 und 1906 nach Beobachtungen in Arnsberg. *Met. Zeit.* **24**, pag. 175, 1907.

Jensen Chr. Bemerkungen in Anschluss an die letzte Arbeit des Herrn Sack über die neutralen Punkte von Babinet und Arago in den Jahren 1903 und 1904. *Met. Zeit.* **24**. pag. 185, 1907.

Alippi T. Nuages irisés. *Rev. néphol.* **14**, pag. 105, 1907.

7. Elettricità atmosferica.

Leyst E. Luftelektrische Zerstreuung und Radioaktivität in der Höhle Bin Basch-Choba in der Krim. *Bull. Soc. Impér. de Nat. d. Moscou.* N 1-2, pag. 191, 1907.

Daunderer A. Luftelektrische Messungen. *Phys. Zeit.* 8, pag. 281, 1907.

Eve A. S. Die Ionisation der Atmosphäre über den Ozean. *Phys. Zeit.* 8, pag. 286, 1907.

Neesen F. Vergleich verschiedener Blitzableiter. *Verh. der D. phys. Ges.* **5**, pag. 184, 1907.

Simonides J. Elmsfeuer. *Met. Zeit.* **24**, pag. 177, 1907.

Negro C. Le scariche elettriche e la loro relazione con la pioggia. *Riv. di Fis. Mat. e Scienze Nat.* 8, Pavia, 1907.

Nodon A. The electrical Influence of the Sun. *Nature.* **75**, 469, 1907.

8. Temperatura del suolo.

Gamba P. Sull'andamento della temperatura nell'aria e nel suolo a Pavia nel 1905. *Rivista d'Astron.* I, N. 4, 1907.

9. Terremoti e vulcani.

Davison C. Seismotectonic Lines. *Nature.* **76**, pag. 18, 1907.

Stoklasa J. Ueber den Ursprung des Ammoniaks in den Produkten der Vesuveruption im April 1906. *Zentralbl. f. Min.* 1907. N. 6.

Leyst E. Ueber des Erdbeben von San Francisco nach den Aufzeichmungen der Seismographen in Moskau. *Bull. Soc. Impér. d. Nat. d. Moscou.* N. 1-2, pag. 185, 1907.

Bigourdan G. Sur les tremblements de terre des 15, 18 et 19 Avril 1907, enregistrés à Paris. *Compt. Rend.* **144**, pag. 823, 1907.

Nagaoka H. The eruption of Krakatoa and the Pulsation of the Earth. *Nature.* **76**, pag. 89, 1907.

10. Climatologia.

— Climatology of the United States. *Nature.* **76**, pag. 11, 1907.

Bonacina L. C. W. Weather regarded as a function of climate. *Roy. Met. Soc. London.* 17 Aprile 1907.

Lindemann. Vierzigjährige Temperaturmittel (1865-1905). *Wetter.* **24**, 2. pag. 33, 1907.

De C. Ward R. Moisture from the Clouds on Table Mountain. *Science.* **25**, pag. 315, 1907.

Mazelle E. Kälteeinbruch und Bora in Triest Januar 1907. *Met. Zeit.* **24**, pag. 171, 1907.

Mac Dowal A. B. Mondphasen und niedriger Barometerstand. *Met. Zeit.* **24**, pag. 177, 1907.

Hann J. Zum Klima der Eritrea. *Met. Zeit.* **24**, pag. 181, 1907.

Hann J. Der tägliche Gang der Temperatur in den äusseren Tropenzone. *Den schrift d. Wien. Akad.* vol. 80, 1907, Vienna.

Eredia F. Dell'influenza della catena degli Appennini sulla distribuzione della pioggia nell'Italia centrale. *Rend. Acc. Lincei.*

Gamba P. Sulla differente quantità di pioggia raccolta da udometri collocati a varia altezza sul suolo. *Rivista meteor. agraria.* XXIII. N. 1, 1907.

11. Calore solare e irraggiamento.

Millochau G. Recherches sur la température effective du Soleil. *Journ. de Phys.* (4), **6**, pag. 389, 1907.

Kromár J. Absolute Messungen der nächtlichen Ausstrahlung in Wien. *Ak. d. Wiss. Wien.* 21 Marzo 1907.

Deslandres H. Étude des variations du rayonnement solaire. *Compt. Rend.* **144**, pag. 941, 1907.

Defant A. Dépendance de la radiation calorifique diffuse de l'époque de l'année. *Rev. nephol.* N. 15. Marzo 1907.

12. Apparecchi.

L. Storia della fisica.

De Waard C. L'invention du télescope. *Ciel et Terre.* **28**, N. 4, 1907.

Thompson S. P. Petrus Peregrinus de Marincourt and his Epistola de Magnete. *Proc. Brit. Acad.* II. London, 1907.

M. Trattati.

Dow C. R. German Science Reader. 1. Mathematics, Physics, and Chemistry. 94 pag. London. Dent. 1907.

Kunz J. Theoretische Physik auf mechanischer Grundlage. X+499 pag. Stuttgart. F. Enke, 1907.

Campion E. Principes généraux d'électricité theorique et pratique, à l'usage des élèves des écoles industrielles, 152 pag. Lille. Donel, 1907.

Petit G. Nouveau manuel complet d'Électricité. 2 vol. Paris, 1907.

Young E. A First Year's course in Geometry and Physics. London: G. Bell and Sons. 1907.

Abendroth W. Leitfaden der Physik. VII+291 pag. Leipzig. S. Hirzel, 1907.

Conrad P. Präparationen für den Physikunterricht in Volks-und Mittelschulen I. VIII+190 S. Dresden. Blasewitz. Bleyl und Kaemmerer, 1907.

Fischer V. Grundbegriffe und Grundgleichungen der mathematischen Physik. VIII+108 pag. Leipzig J. A. Barth. 1907.

Pfaundler. L. Die Physik des täglichen Lebens. 2 Auft. Stuttgart, 1907.

Poincaré L. The Evolution of modern Physics. London, 1907.

Pockels F. Beziehungen zwischen elektrostatischen und magnetostatischen Zustandsänderungen einerseits und elastischen und thermischen andererseits. *Enzykl. d. math. Wiss.* **5**, [2], pag. 350, 1907. Leipzig. B. G. Teubner.

A. Pochettino.

NOTIZIARIO

— Il 2 Giugno si è tenuto a Vienna la seduta finale dell'Associazione internazionale delle Accademie. Il prossimo Congresso avrà luogo a Roma e la direzione dell'associazione è devoluta nell'intervallo all'Accademia dei Lincei. L'associazione ha fatto voti per la pubblicazione delle opere complete di Leibnitz. Fu respinta l'idea di una lingua internazionale come l'Esperanto.

— Dai risultati aereonautici della spedizione diretta dal principe di Monaco nell'estate 1906 nelle regioni fra 70° e 80° lat. N. risulta che il gradiente termico verticale medio fino a 7800 metri è di appena 0,48 per 100 metri. A 10000 metri il vento a componente W ha sempre una velocità di 15 — 20 $\frac{m}{sec}$; spesso la direzione del vento cambia, ciò che induce a credere che il centro del vortice polare cambia spesso di posto e percorre tutto il bacino artico.

— A Londra venne recentemente tenuto un Congresso dell'Associazione Internazionale per l'esplorazione del mare; l'Italia non era rappresentata.

— Il 4 Maggio è stato discusso a Bruxelles il piano di viaggio della seconda spedizione antartica Belga; si cercherà di raggiungere la sponda della banchisa di ghiaccio a 100° W long. e ivi compire misure idrografiche e magnetiche. Si spera di svernarsi sulle coste della terra Edoardo VII. Si tenterà poi di spingersi a E. nella primavera per mezzo di speciali automobili; la durata della spedizione sarà di 2 anni e mezzo.

— Il sig. Connercy ha lasciato un capitale di 4 milioni all'Università di Parigi pe. lo sviluppo scientifico di detta università e per fondare delle borse per giovani che si dedichino a ricerche scientifiche.

— Secondo gli studi di Rotch, Franklin ha inventato il parafulmine prima della famosa esperienza col cervo volante.

— È terminato l'impianto per la ferrovia monofase della Val Brembana. Eccone alcuni dati: Lunghezza della linea: 30 km. — Pendenza massima: 2,4 %. — Tensione sulla linea: 6000 volta. — Numero delle gallerie: 17. — Forza per vettura: 4 motori da 75 HP ciascuno a 250 volta. — Velocità commerciale massima: 55 km. all'ora.

— Secondo Bredig e Fischer si può estrarre l'argon dall'aria facendo assorbire l'O e il N con carburo di calcio mescolato col 10 % di peso di cloruro di calcio fuso a 800° e purificando il residuo facendolo circolare su ossido di rame e su potassa.

— L'esportazione dello Solfo dalla Sicilia diminuisce grandemente causa la concorrenza delle miniere della Luisiana. Il processo d'estrazione usato là è molto economico e consiste nel fondere lo S nella miniera stessa e farlo uscire da essa allo stato liquido con aria compressa con un metodo analogo a quello usato nei pozzi a petrolio.

— Su 3843 incendi avvenuti nella contea di Londra nel 1906 solo un centinaio sono stati prodotti da corti circuiti e 26 da combustione spontanea.

— I signori Splindler e Hoyer di Göttingen hanno costruito sotto la guida del prof. Wiechert 2 sismografi giganteschi. Il pendolo orizzontale possiede una massa stazionaria di 17 tonnellate; questa massa è composta di barite in un cilindro di ferro di 2 metri di diametro per 2 di altezza, sospesa a tre barre di ferro di 3 cm. di diametro; la moltiplicazione è ottenuta con 4 leve moltiplicanti rispettivamente 5, 5, 5, 17 $^1/_2$, in totale dunque circa 2200 volte. Questo pendolo servirà pei terremoti vicini ed è così sensibile da rilevare i fremiti prodotti da una macchina a gas distante 2 $^1/_2$ km. Il pendolo verticale ha una massa stazionaria di 1300 kg.; la moltiplicazione è di 160 volte. Esso servirà per i terremoti lontani. Il primo apparecchio costa 5000 marchi, il secondo 2800 marchi.

— Al prof. A. Schuster è stata offerta la carica di professore onorario di fisica all'Università di Manchester.

— I fondi elargiti da H. M. Dreasury a Liverpool vennero destinati fra l'altro a sovvenzionare ricerche sull'arco continuo e alternativo e sul moto dei gas nei tubi.

— Secondo i calcoli di N. B. Campbell nell'atomo di radio non vi possono essere meno di 1300-elettroni.

— Il 1° Giugno l'astronomo Giacobini di Nizza ha scoperta una nuova cometa che sembra essere a periodo corto; il piano della sua orbita è poco inclinato sull'eclittica.

— Per impedire che i privati possano perturbare il funzionamento delle stazioni di telegrafia senza fili dell'Amministrazione della Marina militare a Washington l'Electrical World propone di proclamare lo stato di guerra su tutto il distretto!

— Il prof. J. W. Richards dell'Università Harward terrà durante il semestre d'estate una serie di lezioni sui metodi di determinazione dei pesi atomici all'Università di Berlino, in qualità di professore di scambio interuniversitario.

— Dalle ricerche di H. Abraham risulta che il limite di sensibilità per l'orecchio è per vibrazioni corrispondenti a una variazione di pressione di $\frac{4}{10,000,000}$ di mm. di mercurio.

— L'accademia di Göttingen ha bandito un concorso a premio (1000 marchi, scadenza: 1° Febbraio 1909) sul tema: Determinazione della carica dell'elettrone, sua variazione colla velocità, critica delle precedenti osservazioni e teorie.

— La Centrale generatrice di Brusio è la più grande di Europa. Come serbatoio funziona il lago di Porchiano, di qui un canale di 5 km. arriva a una camera d'acqua posta a 420 m. sopra la stazione. Attualmente si hanno 6 turbine di 3000 cavalli l'una, nel 1908 saranno montate altre 6 turbine di eguale potenza; (la linea di trasmissione, lunga 160 km. porta l'energia sotto forma di correnti trifasi a 47,000 volta.

— Alla fine di Giugno del 1908 si radunerà a Parigi il primo Congresso internazionale delle industrie frigorifiche. La prima sezione presieduta da D'Arsonval s'occuperà specialmente degli effetti delle basse temperature rispetto alla fisica, chimica e fisiologia.

— È stato respinto il ricorso della Compagnia Americana Marconi contro la Compagnia de Forest per l'uso del detector elettrolitico in base al fatto che questo è un contatto *completo* mentre il brevetto Marconi parla di contatto *incompleto*.

— Il Senato dello Stato di Pensilvania ha votato 70,000 l. alla Am. Phil. Soc. per commemorare degnamente Beniamino Franklin.

— W. Ramsay è stato creato commendatore della Corona d'Italia da Re Vittorio.

— Il pallone con cui Wellman si propone di raggiungere il polo Nord ha le seguenti caratteristiche: Spostamento 8500 m³, lunghezza 56 m., diametro massimo 16 m., lunghezza del cono moderatore 250 metri. Il motore a petrolio è della forza di 70 H. P. e pesa 900 libbre. Il raggio d'azione è calcolato a 3000 km. A bordo sarà collocato una stazione di telegrafia senza fili.

— Il 2 Settembre 1906 segnò il 20mo anniversario dell'Osservatorio del Somblick (10.190 piedi). Dalle osservazioni colà compiute risultano i seguenti dati: temperatura minima media annua — 22°, 2, idem massima 49°, 3, estremi assoluti — 35°, 0 e + 56°, 8. Pressione minima media mensile in Marzo, massima in Aprile. Umidità relativa minima in inverno. Media precipitazione annua 70,7 pollici di cui 4,8 pioggia.

— Il R. Istituto Lombardo bandisce un concorso a premio di L. 864 (Scadenza 1° Aprile 1911) sull'azione fisiologica e terapeutica delle correnti d'alta frequenza ed uno di L. 2500 più una medaglia d'oro di L. 500 sul tema: Stato attuale degli studi metallografici in rapporto alle proprietà fisiche dei metalli.

— La gran medaglia d'oro della Société de géographie è stata conferita al Colonnello Bourgeois per la missione della misura dell'arco di meridiano di Quinto.

— È stato deciso di applicare la trazione elettrica monofase alle linee Parma-Fornovo e Stradella-Marzolara. La tenzione della linea sarà 400 volta in città e 4000 fuori; ogni vettura avrà due motori da 60 cavalli l'uno, la velocità commerciale sarà 30 $\frac{\text{km}}{\text{ora}}$.

— Il parlamento ha votato la trasformazione a trazione elettrica delle seguenti linee: Pontedecimo-Busalla (11 km.), Savona-S. Giuseppe (21 km.), Bardonecchia Modane (7 km.), Milano-Monza-Lecco (51,5 km.), Usmate Bergamo (26 km.), Calolzio-Ponte S. Pietro (18 km.), Gallarate-Arona (26 km.), Gallarate-Laveno (32 km.), Domodossola-Iselle (19 km.), Pistoia-Porretta (40 km.), Napoli-Salerno (54 km.), Torreannunziata-Castellammare (6 km.).

— Secondo i signori Martin e Norton la seta e il cotone esposti ai raggi del radio perdono in solidità causa la formazione dell'ossiocellulosa (come alla luce solare).

— Negli Stati Uniti vi sono già 780 km. di linee elettriche in fili di alluminio trasmettenti 65000 H. P. a tensioni che vanno fino a 60.000 Volta.

— Fra le leghe più recenti d'alluminio sono degne di nota il romanium (Al Cu. Wolf) che con una densità 2,75 può sopportare sforzi di 30 kg. per mm², il magnalium (Al. Mg.) più leggero dell'alluminio, il ziscone (Al. Zn.) duro come l'acciaio.

— Le università maggiori degli Stati Uniti d'America sono le seguenti:

Città	Stato	Numero Studenti	Dotazione in dollari	Data fondazione
Ann Arbor	Michigan	4136	794.736	1839
Cambridge	Massachussets	4136	3.082.103	1636
Chicago	Illinois	4580	1.196.174	1861
N. York (Columbia)	N. York	4833	1.329.749	1764

— Ecco le somme elargite da alcuni privati alle Università Americane:

50.000.000 dollari dal senatore Stanford all'Università di Palo Alto (California). 3.000.000 dal John Hopkins a quella di Baltimora. 1.100.000 dal sig. Tulane a quella di New Orleans, 1.500.000 da Lady Fiste a quella di Ithaca, 41.000.000 di franchi da Rockfeller a quella di Chicago.

— L'Università di Basilea celebra quest'anno il bicentenario della nascita di Eulero.

— Il comandante Peary partirà il 1° Luglio da N. York per fare un 3° tentativo di raggiungere il polo.

— Il governo chileno ha incaricato Montessus de Ballore di organizzare 4 osservatori sismici uno di 1 ordine e 3 di secondo.

— L'Accademia di Vienna ha conferito il premio Baumgartner di 2000 corone al Dr. v. Schweidler per il suo lavoro sulle anomalie dei dielectrici.

— Il ministero del Würtemberg e l'Accademia di Prussia ha concesso una sovvenzione al prof. Wedekind per le sue ricerche sulle combinazioni magnetiche di sostanze non magnetiche.

— De Forest ha potuto telefonare senza fili fino a km. 6 $^1/_2$ di distanza mantenendo inalterato il timbro e l'altezza del suono e della parola trasmessi.

— Il 2 Giugno un fulmine incendiava, caso raro, un aerostato libero fra nubi temporalesche causando la morte del Cap. Ulivelli che lo montava.

— Secondo le teorie di Schmidt e Julius un raggio proveniente da un punto del sole o da una protuberanza subirebbe nell'astro stesso una forte rifrazione; dovrebbe dunque essere polarizzato parzialmente, orbene Sale afferma che non vi è traccia di polarizzazione.

— Le osservazioni della Commissione internazionale dei ghiacciai del 1903 hanno dimostrato che quasi tutti i ghiacciai delle Alpi austriache, bavaresi e del Canton Vallese sono in via di regresso.

— La spedizione artica del cap. Mikkelsen ha fatto sapere che si trova chiusa fra i ghiacci a 200 miglia da Point Barrovo nell'Alasca. Le condizioni della marea e le notizie avute dagli indigeni fanno supporre che a non molta distanza dal continente vi sia un'isola finora sconosciuta.

— L'argento e il rame hanno la maggiore conducibilità elettrica per unità di volume, il sodio, poi calcio e potassio e alluminio hanno la maggiore conducibilità per unità di peso (il sodio 3 volte il rame) ora siccome il Na costa 1 fr. al kg. ne viene la possibilità di usarlo nelle condutture elettriche. Betts ha fatto la prova su un conduttore di sodio chiuso in tubo di ferro. Un conduttore così, lungo 40 metri, si conserva

benissimo per 9 mesi, e sottoposto a una corrente continua di 500 ampère non s' alterò minimamente.

— I proff. G. Castelnuovo e V. Volterra dell' Università di Roma sono stati nominati membri onorari della Società matematica di Londra.

— Il premio Reale della R. Accademia dei Lincei per la Matematica fu conferito ai proff. Arzelà e Castelnuovo, quello per la Chimica ai proff. Angeli e Balbiano.

— Dal 14 al 19 Ottobre di quest'anno verrà tenuto in Jena per cura della Ditta C. Zeiss un corso teorico-sperimentale di Microscopia scientifica gratuito. Il prof. Ambronn tratterà della parte riguardante l' ottica geometrica e le esperienze di diffrazione di Abbe (Lunedi e Martedi) il dott. Köhler parlerà della Microfotografia specialmente con la luce ultravioletta, (Mercoledi e Giovedi) finalmente il dott. Siedentopf tratterà dell' ultramicroscopia. Le lezioni verranno tenute nell' Istituto di Microscopia dell' Università di Jena. Per informazioni rivolgersi al dott. Siedentopf, Jena. Kaiserwilhelmstrasse N. 7.

LIBRI NUOVI

SOPRA I VOLUMI IV E V DELLA ENCICLOPEDIA MATEMATICA.

Debbo alla cortesia del Dott. C. H. Müller le seguenti notizie su lo stato attuale dei volumi IV, V, della Encyklopädie der math. Wissenschaften: delle parti cioè della Enciclopedia stessa, dedicata alle applicazioni della matematica alla Meccanica (vol. IV), alla Fisica (vol. V).

Il lettore vi troverà una risposta alle domande: quali dei fascicoli di tali volumi siano usciti, quali si trovino in corso di stampa, quali modificazioni siano intervenute nel piano primitivo della Enciclopedia, per quanto concerne i volumi in parola. Talora anche, ma solo eccezionalmente, quando usciranno prevedibilmente alla luce i fascicoli, che attualmente si preparano: si tratta di un'indicazione che non potrebbe venire fornita, se non dai singoli autori.

Non è forse superfluo che, ad illustrare qui pure gli scopi fondamentali e la natura dei due volumi, si ricordi come in entrambi accanto ai risultati delle indagini astratte della meccanica razionale e della fisica matematica « vecchio stile » (ritroveremo la espressione nel brano riportato più sotto) si sono contemplati con molta larghezza i risultati della esperienza. Può venir detto di più, ed affermato che i secondi si contrapposero ai primi, a dimostrarne la eventuale deficenza o la fallacia.

« Era necessario, specialmente nel campo delle applicazioni tecniche, di insistere non già sugli sviluppi matematici propri di problemi convenzionalmente posti, ma sulla critica delle premesse. Troppo spesso risulta che ancora mancano i risultati sperimentali atti a legittimare quest'ultime, e che le costruzioni teoriche fondate su tali basi malcerte si debbono oggi considerare come affrettate e manchevoli ». Per quanto concerne più specialmente la fisica, si volle che di preferenza

nella Enciclopedia trovasse posto non « la fisica matematica vecchio stile, che pur nelle opere classiche di Fourier, Poisson, Lamé conduceva ad applicare una grande somma di acume matematico a problemi irreali ed arbitrari, ma la moderna fisica dei fenomeni reali (sic), tanto ricca di problemi matematici ».

Una tale tendenza si rispecchia d'altronde già nella semplice annunciazione degli articoli contenuti nei due volumi.

Volume IV: *Meccanica.*

Il volume consta di quattro sezioni, di cui la prima compilata da A. Voss, concerne i *Principî della meccanica razionale* *: [1]) è in essa fornita un' esposizione storico critica dei fondamenti (filosofici, meccanici, analitici) della meccanica. La seconda sezione concerne la meccanica dei punti e dei sistemi rigidi ed è alla sua volta divisa in parti, più specialmente dedicate I alla trattazione geometrica di questioni elementari, II alle applicazioni ed alla considerazione delle cause di perturbazione, III alla meccanica analitica in senso stretto.

Degli articoli di cui si compone la prima di tali parti manca tuttora l'ultimo, di Stäckel, (con aggiunta di Petersen) su la *dinamica elementare:* è dedicato ai principi differenziali della dinamica e uscirà prima del Congresso di Roma.

Uscirono all'incontro gli articoli di Timerding su i presupposti geometrici della meccanica di un corpo rigido, di Schönflies-Grübler sulla Cinematica, di Jung sulla Geometria delle Masse, di Henneberg sulla statica grafica.

L'articolo di Furtwängler * sulla meccanica dei più semplici apparecchi fisici, dedicato al pendolo ed alla bilancia, è il primo della II: seguono ad esso la Meccanica fisiologica * del Fischer, e l'articolo di Walker (Giuochi e Sport *) su il bigliardo il golf, il bumerang e la bicicletta: seguirà parimenti Heun, coi problemi dinamici della tecnica delle macchine + [2]).

1) L'asterisco * indica che l'articolo già vide la luce; la croce + che esso è in corso di stampa.

2) Lo Heun riferì sul suo articolo nel vol. 9 dello Jahresbericht des deutschen Math. Ver.

La III riguarda i sistemi rigidi aventi un grado di libertà finito. Lo Stäckel vi tratterà distintamente dello sviluppo dei metodi generali, della discussione speciale di problemi dinamici, della rotazione di un corpo rigido.

II e III costituiscono il secondo tomo del volume: nel terzo trovan posto i presupposti geometrici della meccanica dei corpi deformabili * di Abraham (l'articolo si differenzia da quello di Timerding per la introduzione del concetto di « campo ») e la Idrodinamica. La quale concernono gli articoli di Love su i presupposti fisici di essa * e sulla sua teoria *, di Finsterwalder sulla aerodinamica * (specialmente su la teoria del volo degli uccelli e la sua applicazione alla tecnica del volo) del Cranz sulla Balistica *, (con speciale considerazione della resistenza dell'aria e dei dati di fatto) dello Zemplen sui movimenti discontinui in liquidi * (la théorie des ondes di Hadamard), di Forchheimer sull'idraulica * (inteso specialmente a mostrare le deficenze della idrodinamica), di Grübler sui motori idraulici e le pompe +, di Kriloff su la teoria della nave +.

L'ultimo articolo vedrà la luce prima dell'inverno, ed il tomo sarà completo prima del Congresso di Roma.

Il tomo IV concerne la Elasticità e la Teoria della resistenza dei materiali e la Meccanica dei sistemi di un gran numero di elementi.

Le equazioni fondamentali della teoria della elasticità + trattano C. H. Müller e Timpe in un articolo introduttorio, la teoria dell'integrazione di tali equazioni + il Tedone che col Timpe, applica in un successivo articolo + i risultati ottenuti al caso di speciali corpi (ad es. all'ellissoide di rotazione: i risultati che si comunicano al riguardo sono dovuti al Tedone) o di speciali condizioni di contorno (il problema di Saint-Venant ed il problema delle lamine) o di lamine infinitamente sottili e di fili. Coi tre articoli ora ricordati sarà pronto per il Congresso di Roma quello di Lamb su le oscillazioni dei corpi elastici +.

Seguiranno gli articoli di Reissner su la teoria delle costruzioni e di Prandtl su i problemi di elasticità e di resistenza presentantisi specialmente al costruttore di macchine. Poichè si dimise l'idea di uno speciale articolo su la teoria degli stru-

menti di misurazione fondati sul presentarsi di effetti elastici (originariamente affidato al Furtwängler) sarà con essi compiuta la trattazione della teoria dell'elasticità.

Per la triste fine del più autorevole cultore della meccanica statistica, il Boltzmann, si affidava ai coniugi Ehrenfest la trattazione delle applicazioni statistiche del calcolo delle Probabilità.

Volume V: *Fisica.*

Il volume risulta di due parti, di cui la prima oltrechè una introduzione su la Misura ed il misurare * di Runge e sulla Gravitazione * di Zenneck concerne la Termodinamica e la Fisica molecolare, la seconda è esclusivamente dedicata all'Elettricità e all'Ottica.

Alla termodinamica si riferiscono gli articoli di Bryan su la teoria generale *, Hobson e Diesselhorst (i due principi fondamentali, i concetti fondamentali ed i metodi, la deduzione del secondo principio da quelli della meccanica), la conduzione del calore * di Hobson (si ragiona dei metodi di calcolo) e di Diesselhorst (sui metodi di misurazione), la Termodinamica tecnica * di Schröter (i fondamenti, ed i processi ciclici delle macchine termodinamiche) e di Prandtl (movimenti di gas e di vapori).

Il primo dei lavori su la Fisica molecolare concerne la Chimica atomistica *. Lo Hinrichsen ne espone storicamente i concetti fondamentali, il Mamlock tratta della Stereochimica (del carbonio, dell'ossigeno, del fosforo ecc.), lo Study, in due appendici, dei pesi atomici e delle questioni combinatorie.

Seguono a questo gli articoli di Liebisch, Schoenflies e Mügge sulla Cristallografia *, di Boltzmann sulla teoria cinetica della materia *, di Minkowsky sulla Capillarità *, di Kamerling-Onnes sull'equazione di stato (la teoria di van der Waals) di Van 't Hoff sulla Chimica-fisica e l'elettrochimica.

La prima delle sezioni della seconda parte (Elettricità ed Ottica), dedicata ai presupposti fisici dell'elettricità è compiuta cogli articoli di Reiff, Sommerfeld sulle teorie premaxwelliane *, di Lorentz sulla teoria elettromagnetica di Maxwell * e sugli sviluppi ulteriori di tale teoria * (teoria degli elettroni).

Ai problemi matematici dell' elettricità si riferiscono gli articoli di Gans su l' Elettrostatica e la Magnetostatica *, di Pockels sui rapporti delle modificazioni di stato elettrostatiche e magnetiche colle elastiche e termiche *, di Debye e Dubois sui campi stazionari o lentamente modificantisi, di Abraham sui campi rapidamente modificantisi, di Diesselhorst sui rapporti del flusso elettrico col calore ed il magnetismo, di N. N. su l'elettrotecnica.

Analoga è la distinzione degli articoli concernenti l'ottica in articoli sui fondamenti fisici e sugli sviluppi matematici.

Alla prima classe appartengono quelli di Wangerin sulla vecchia teoria (ottica elastica), di Wien sulla teoria elettromagnetica della luce, di Wien, Lorentz e Runge sullo « Hineinspielen » della fisica molecolare e della teoria degli elettroni nell'ottica (l'ottica magnetica vi sarà trattata dal Lorentz, la analisi spettrale dal Runge).

Alla seconda classe gli articoli di Finsterwalder sull'ottica dei raggi e sugli strumenti ottici, di N. N. sull' ottica delle onde, di Pockels sull'ottica dei cristalli.

In un articolo terminale (che potrebbe trovar posto nel VII Volume dell'Enciclopedia, concernente la filosofia, la storia e la pedagogia delle matematiche) si tratteranno dal Sommerfeld e dal Mie le concezioni fondamentali ed i metodi delle scienze fisiche.

UGO BROGGI.

PHYSIKALISCHE CHEMIE DER ZELLE UND DER GEWEBE.

R. HÖBER.

(2.a edizione. Leipzig. W. Engelmann 1906).

Il trattatello del Höber, era già stato accolto con molto favore nella sua 1ª edizione dai fisiologi i quali vi avevano trovati raccolti ed esposti semplicemente i principii della fisicochimica, e le loro applicazioni alla biologia.

Benchè lo sviluppo della fisico-chimica non abbia fin' ora portato a quei risultati che parecchi fisiologi sembravano da

essa sperare, non resta diminuita l'importanza del suo studio, chè anzi gran parte dei problemi biologici — pur non avendo trovata la soluzione che si sperava nelle leggi fisico-chimiche — non possono oggi essere studiati senza tener conto delle leggi stesse.

D'altra parte, se alcune illusioni si mostrarono infondate, questo dipende particolarmente dalla precipitazione con cui si era voluti correre alla interpretazione fisico-chimica dei fenomeni vitali. Ma accanto a capitoli che sembrano aver perduto d'importanza, ve ne sono altri che ne hanno acquistata nei tempi più recenti una sempre maggiore. Così lo studio dei colloidi e quello delle soluzioni saline, intorno alle quali l'A. ha scritto capitoli che non esistevano nella edizione primitiva, hanno richiamata in questi ultimi anni l'attenzione di numerosi osservatori, dell'opera dei quali l'A. fa cenno diligente.

Anche sul meccanismo d'azione degli enzimi, uno studio fisico-chimico accenna di poter dare qualche luce, e su questo argomento il Höber ha arricchito il suo libro di parecchie aggiunte: ma qui forse le nostre conoscenze sono ancora troppo sparse e contradditorie per essere efficacemente riunite in una trattazione sistematica.

M. C.

LEÇONS SUR LA THEORIE DES GAS.

BOLTZMANN L.

(Traduites per A. Gollotti et H. Bénard, avec une introductions et des notes de M. Brillouin. — Seconde partie. Paris. Gauthier-Villars, 1905).

Il libro non è d'ieri, ed è già noto agli studiosi nell'originale tedesco. Non è quindi qui il caso di esporre minutamente l'indirizzo in cui esso è concepito, nè le interessanti questioni di natura filosofica e matematica che ancora si connettono con questa teoria. Noi potremo del resto per alcune di queste osservazioni rinviare alla recensione della prima parte di questo trattato che fu già inserita in questo periodico.

Questo volume contiene gli sviluppi che si collegano colla teoria di Van der Waals. La quale, esposta nei primi capitoli

nella forma datale da Van der Waals stesso, è ripresa e dedotta di nuovo in forma più rigorosa partendo dai teoremi della meccanica statistica.

Negli ultimi capitoli è studiata la teoria dei gas a molecole complesse.

In questo volume troviamo inoltre due interessanti note del signor Brillouin: ed un completo elenco bibliografico delle memorie e dei libri usciti su questo argomento dopo la pubblicazione del libro del Boltzmann sino all'anno 1902.

E. L.

Libri inviati per recensione

H. HEBERT « Magnetische Kraftfelder ».
(A. Barth. Leipzig, 1905. Mk. 7).

G. MERCATOR — « Das Arbeiten mit Modernen Flachfilmpackungen ».
(Wilhelm Knapp. Halle a S. 1907. Mk. 1).

OLIVER LODGE — « Elektronen oder die Natur und die Eigenschaften der negativen Elektrizität ».
(Quandt-Händel. Leipzig. 1907. Mk. 6).

Ing. A. MARRO — « Impianti elettrici a correnti alternate ». 2ª ediz. (Manuali Hoepli, pag. 774).
(U. Hoepli. Milano. 1907. L. 8,50).

J. POST et A. B. NEUMANN — « Traité complet d'analyse chimique appliqué aux essais industriels ». 2ᵉ edit. traduite par L. Gautier. T. 1ᵉʳ, fasc. 1ᵉʳ.
(Librairie Scientifique A. Hermann. Paris, 1907. L. 6,50).

J. J. THOMSON — « Conduction of electricity through gases ». 2ᵉ edition.
(University Press. Cambridge, 1906. Scell. 16).

Atti della Società di Fisica.

Resoconto delle sedute tenute fra i Soci a Roma

VIII. Seduta del 24 Marzo 1907. (Anfiteatro di Fisica del R. Liceo E. Q. Visconti). Pres. Volterra.

Il Presidente dà lettura di un telegramma di ringraziamento del Prof. Righi in risposta a quello speditogli nella precedente riunione.

Il Socio Vanni tiene quindi una conferenza sperimentale in cui espone il principio, il modo di funzionare e le applicazioni del Cimometro di Fleming.

IX. Seduta del 15 Aprile 1907. (R. Istituto fisico). Presidente Volterra.

Il Presidente annunzia la morte del Socio Prof. Del Torre; e riferisce sulla parte presa dalla Società nelle onoranze al Prof. Righi in Bologna.

Il Socio Goretti espone con l'aiuto di proiezioni il modo di funzionare del nuovo elettrometro del Prof. Wulff (Vedi Phys. Zeitschrift 8, p. 246, 1907).

Il Prof. Castelnuovo espone uno schema di lezione sul concetto e la definizione di massa. Alla discussione che ne segue prendono parte i sigg. Zambiasi, Ascoli, Bisconcini, Sella, Giorgi, Silla.

X. Seduta del 27 Aprile 1907. (R. Istituto fisico). Presidente Volterra.

Il Presidente comunica di avere nominato una Commissione composta dei sigg. Giorgi, Piola e Vailati, coll'incarico di riassumere e concretare i risultati della discussione avvenuta nelle sedute precedenti sul concetto e sulla definizione di massa nell'intento di pubblicare nel *Nuovo Cimento* la relazione della Commissione.

Si dà lettura di una comunicazione del Prof. Mazzotto sulla definizione della densità. Ad essa seguono alcune osservazioni dei Soci Sella e Vanni. Analoga comunicazione del Prof. Mazzotto circa la massa viene consegnata alla Commissione, di cui sopra.

Il Socio Sella dimostra l'esperienza dei magneti galleggianti del Mayer *(Phil. Mag.* (5), 7, pag. 98, 1879).

Il Socio Blanc espone alcuni risultati delle sue ricerche sul contenuto del suolo in Torio.

Il Socio Vanni critica il modo con cui viene di solito spiegata l'esperienza del galleggiante a reazione per efflusso liquido; seguono osservazioni dei Soci Silla, Giorgi, Volterra.

Il Socio Goretti fa alcuni appunti sul modo di presentare nelle lezioni la rappresentazione grafica della forza, le formule del moto vario, le definizioni delle linee di forza.

Il Presidente annunzia che la Presidenza della Società Italiana di Fisica ha aperto un concorso per un'esperienza da lezione nei seguenti termini:

1. — È aperto *fra i membri della Società Italiana di Fisica* un concorso per un' *esperienza da lezione.*

2. — Il premio consisterà in una medaglia d'oro del valore di lire 200.

3. — I concorrenti dovranno inviare per iscritto non più tardi del 15 Luglio 1907 al Presidente della Società (R. Istituto Fisico di Roma) una descrizione particolareggiata delle esperienze colle quali intendono partecipare al concorso. Le esperienze dovranno essere inedite ed originali. Gli scritti inviati potranno portare il nome dell'Autore oppure un *motto* ripetuto sopra una busta suggellata contenente il nome dell'Autore.

4. — Una Commissione che verrà nominata dal Consiglio di Presidenza della Società sceglierà fra le esperienze presentate le tre migliori, tenendo anche conto dei mezzi impiegati. Queste tre esperienze dovranno essere pubblicamente eseguite ed illustrate durante il prossimo Congresso di Parma dagli autori o da persone da loro designate. La scelta definitiva dell'esperienza, a cui verrà conferito il premio, sarà fatta per votazione dei soci presenti al Congresso.

— 9 Maggio 1907.

Gita sociale lungo la Via Appia per vedere i punti magnetici negli antichi ruderi. Sotto la guida del Prof. Folgheraiter si esamina l'azione magnetica di un rudero posto di



fronte agli avanzi di un ninfeo della Villa dei Quintilii (a 7 chm. da Roma). Tutta la facciata che guarda la via ha forte polarità magnetica sud, che si fa sentire con una deviazione di 60° dalla posizione normale dell'ago magnetico già a 3 metri di distanza: sullo stesso rudero vi sono due zone distinte a nastro, di polarità opposta, dirette dall'alto in basso nella parete verso Roma, mentre nel mezzo della parete opposta a questa a circa 1 m. dal suolo vi è una piccola zona nord. Zone o punti distinti trovansi su quasi tutti i ruderi dei monumenti che si seguono nella direzione verso Albano; caratteristica è la magnetizzazione di un muro disposto parallelamente alla direzione della Via (a circa 13,5 km. da Roma): una scarica elettrica produsse all'estremo del muro

verso Albano una fenditura, la quale separa due zone distinte a nastro, molto forte e di polarità opposte: polarità nord verso la campagna, polarità sud verso la Via, sensibili anche a due metri di distanza; la scarica ha avuto luogo perciò fra l'elettricità negativa della nube e la positiva del suolo. (Vedi studi sul magnetismo prodotto da fulminazioni; frammenti di Geofisica n. 10. Spoleto 1900).

XI. Seduta dell' 11 Maggio 1907. (R. Istituto fisico). Presidente Volterra.

Il Socio Sella presenta le diverse esperienze da scuola immaginate per dimostrare la diminuzione della pressione atmosferica coll'altezza e ne discute i vantaggi relativi. Egli ripete poi le dimostrazioni del Davis e del Wood per fare vedere la pressione frontale esercitata dalle onde sonore.

Il Socio Ascoli secondo il programma stabilito nella prima seduta inizia la discussione sul concetto e sulla definizione di temperatura e di calore esponendo proprie osservazioni critiche.

— 26 Maggio 1907. I Soci per gentile invito dell'Associazione Elettrotecnica Italiana assistono ad una conferenza sperimentale del Prof. Majorana sulla telefonia senza fili tenuta nell' Istituto centrale telegrafico.

— 15 Giugno 1907. Visita al laboratorio aerodinamico della Brigata Specialisti del Genio per gentile concessione del Maggiore Moris, comandante la Brigata stessa. Il tenente Grocco mostra il ventilatore e gli apparecchi costruiti per misurare la velocità del vento, la resistenza all'aria di solidi di varia forma, la potenza delle eliche, ed alcune belle esperienze di aerodinamica dovute in parte al Prof. Orlando. La dimostrazione del modo di funzionare di un idroplano per raggiungere grandi velocità suscita il più grande interesse. Segue una visita ai laboratori dove si studiano e si costruiscono le singole parti di un dirigibile.

— 22 Giugno 1907. Visita ai laboratori sperimentali delle Ferrovie dello Stato presso la Stazione di Trastevere. L'ingegnere Segre con grande cortesia conduce gli intervenuti a visitare in dettaglio e con copia di spiegazioni i laboratori per

lo studio degli apparecchi di ventilazione dei tunnels, per l'esame delle acque, per l'esame micrografico dei metalli. (Il Dott. Giammarco presenta una bella serie di proiezioni di superfici metalliche) per la resistenza dei materiali ecc. ed infine i laboratori per misure elettrotecniche.

Continuazione della Nota pubblicata a pag. IX.

Hanno pagato la quota del 1906 i Soci:

Dainelli Alberto
Drago Ernesto
Pitoni Rinaldo

Hanno pagato la quota del 1907 i Soci

Accolla Giuseppe
Bonetti Filippo
Brucchietti Giuseppe
Bruschi Raffaello
Cinelli Modesto
Faè Giuseppe
Macaluso Damiano
Martinelli Giuseppe
Mastricchi Felice
Mazzotto Domenico
Palagi Ferdinando
Palazzo Luigi
Perotti Pier Luigi
Pierucci Francesco
Sacerdote Mario
Sala Mario
Silla Lucio
Stracciati Enrico
Zampetti Amilcare
Zappa Giovanni.

FINE DEL VOLUME XIII, SERIE V.

PIETRO SALVIONI, *gerente responsabile*

Del « NUOVO CIMENTO » si pubblica ogni mese un fascicolo di 80 pagine.

Gli abbonamenti sono obbligatori per un anno e si intendono rinnovati, quando non siano disdetti entro il Dicembre.

Devono pagarsi anticipatamente.

PREZZO DELL'ABBONAMENTO PER L'ANNO 1907

In Italia	**L. 18, 00**
All' Estero	**,, 20, 00**

Per domande di abbonamenti, e per tutto quanto riguarda l'Amministrazione del Periodico rivolgersi all'amministratore **ALFREDO LAVACCHINI — Via Gino Capponi 3, FIRENZE.**

Chi desidera pubblicare nel *Nuovo Cimento* una Memoria originale manderà il relativo manoscritto ad uno dei cinque membri del Comitato di Compilazione Proff. BATTELLI, ROITI, VOLTERRA, GRIMALDI, SELLA.

Dei **lavori inediti**, pubblicati dal **NUOVO CIMENTO**, vengono date 50 copie gratis agli Autori.

☞ Gli Uffici postali italiani ed esteri ricevono gli abbonamenti: ed i nostri Lettori non hanno che da versare **L. 18** per l' Italia e **L. 20** per l' Estero a favore del sig. ***Alfredo Lavacchini***, Amministratore del **Nuovo Cimento**, Via Gino Capponi 3, Firenze anche senza dargliene avviso. — Coloro che appartengono alla *Società Italiana di fisica* sono pregati di spedire la quota totale di **L. 18** al *Cassiere della Società* (Prof. A. Stefanini, Lucca); il quale, a richiesta rilascia la quietanza di **L. 15** per l'abbonamento, che eventualmente sia a carico dell' Istituto il cui Socio appartiene.

50
7L